

Capitolo 7

Integrazione numerica

In questo capitolo si studiano alcuni metodi per il calcolo approssimato di integrali definiti.

Alcuni motivi che consigliano l'uso di metodi approssimati in luogo di metodi analitici ("esatti") sono i seguenti:

di molte funzioni integrabili non si conosce una funzione primitiva esprimibile con funzioni elementari (per esempio, $f(x) = e^{\cos x}$, $f(x) = x^x$);

in molti casi, funzioni semplici hanno funzioni primitive tanto complicate che spesso le formule approssimate sono più facilmente calcolabili di quelle esatte e con maggiore precisione (per esempio, una primitiva di $f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$ è $F(x) = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\frac{1}{2} \log \frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \arctan \frac{\sqrt{2}x}{1-x^2} \right]$);

spesso della funzione integranda è nota solo una restrizione a un insieme discreto.

7.1 Grado di precisione ed errore

Sia $f(x)$ sufficientemente regolare sull'intervallo $[a, b]$ dell'asse reale. Sia $\rho(x)$ una *funzione peso* non negativa in $[a, b]$ e tale che esistano finiti i *momenti*

$$m_k = I(x^k \rho) = \int_a^b x^k \rho(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots \quad (7.1)$$

Si pone il problema di approssimare

$$I(\rho f) = \int_a^b \rho(x) f(x) dx$$

con una *formula di quadratura* della forma

$$J_n(f) = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i), \quad (7.2)$$

dove i numeri a_i , $i = 0, 1, \dots, n$, detti *pesi* o *coefficienti*, sono reali. I punti x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, con $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ sono detti *nodi* e di solito appartengono all'intervallo $[a, b]$. L'errore è perciò formalmente dato da

$$E_n(f) = I(\rho f) - J_n(f).$$

Una formula è individuata una volta che lo siano i nodi e i pesi. Per determinare questi $2n + 2$ parametri si impone che l'errore sia nullo per altrettante funzioni, elementi della base canonica di Π_{2n+1} (spazio vettoriale dei polinomi algebrici di grado al più $2n + 1$). Cioè si richiede che sia

$$E_n(1) = E_n(x) = \dots = E_n(x^{2n+1}) = 0, \quad (7.3)$$

ovvero

$$\begin{array}{ccccccccc} a_0 & + & a_1 & + & \dots & + & a_n & = & m_0 \\ a_0 x_0 & + & a_1 x_1 & + & \dots & + & a_n x_n & = & m_1 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_0 x_0^{2n+1} & + & a_1 x_1^{2n+1} & + & \dots & + & a_n x_n^{2n+1} & = & m_{2n+1}, \end{array} \quad (7.4)$$

dove i termini noti m_k , $k = 0, 1, \dots, 2n + 1$, sono dati dalla (7.1).

Si può dimostrare che la soluzione $(a_0, \dots, a_n, x_0, \dots, x_n)^T$ del sistema non lineare (7.4) è univocamente determinata (per il caso con $\rho(x) = 1$, cfr. Esempio 4.8.3). La formula (7.2) con coefficienti e nodi soddisfacenti le (7.3) si dice che ha *grado di precisione* (algebrico) almeno $2n + 1$; se inoltre risulta $E_n(x^{2n+2}) \neq 0$, il grado di precisione è esattamente $2n + 1$.

Si noti che se $f(x) \in \Pi_{2n+1}$ allora dalle (7.3) segue $E_n(f(x)) = 0$.

L'errore (7.3) è suscettibile di una rappresentazione generale: sussiste infatti il seguente teorema, enunciato, per semplicità, nel caso di una formula (7.2) con $\rho(x) = 1$ e $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Teorema 7.1.1 (di Peano) Sia $f(x) \in C^{m+1}([a, b])$ e $J_n(f)$ di grado di precisione m , allora risulta

$$E_n(f) = \frac{1}{m!} \int_a^b f^{(m+1)}(t) G(t) dt \quad (7.5)$$

essendo $G(t) = E_n(s_m(x-t))$ e

$$s_m(x-t) = \begin{cases} (x-t)^m, & t < x, \\ 0, & t \geq x. \end{cases}$$

La funzione $G(t)$ dicesi *nucleo di Peano*.

Nel caso in cui $G(t)$ non cambi segno in $[a, b]$, usando la (7.5) e il teorema della media, si ottiene

$$E_n(f) = \frac{1}{m!} f^{(m+1)}(\theta) \int_a^b G(t) dt, \quad \theta \in]a, b[,$$

da cui si può ricavare $\int_a^b G(t) dt$ (che non dipende da f) ponendo, per esempio, $f(x) = x^{m+1}$; ne segue

$$E_n(f) = \frac{f^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!} E_n(x^{m+1}), \quad \theta \in]a, b[. \quad (7.6)$$

7.2 Le formule di Newton-Cotes

Se in (7.2) i nodi sono prefissati arbitrariamente (due a due distinti), i pesi sono determinati dalle prime $n+1$ equazioni di (7.4) che formano il sistema lineare

$$V\alpha = \mu \quad (7.7)$$

con

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix},$$

$\alpha^T = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, $\mu^T = (m_0, m_1, \dots, m_n)$. Poiché V^T è una matrice di Vandermonde, nelle ipotesi attuali è $\det(V) \neq 0$ e quindi α esiste ed è unico.

Il grado di precisione è almeno n avendosi $E_n(1) = E_n(x) = \dots = E_n(x^n) = 0$.

Se $\rho(x) = 1$ e i nodi sono fissati in progressione aritmetica di ragione $h = (b-a)/n$, cioè $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$, e quindi con $x_0 = a$ e $x_n = b$, si hanno le *formule di Newton-Cotes*; h si dice il *passo* della formula. I pesi sono definiti in base alla formulazione algebrica precedentemente data e quindi calcolabili risolvendo il sistema (7.7); tuttavia, per una loro rappresentazione esplicita conviene ricorrere ad un approccio interpolatorio.

Al riguardo si esprime $f(x)$ tramite il polinomio di interpolazione di Lagrange (cfr. Teorema 6.2.2), usando i nodi x_i . Cioè si pone

$$f(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \pi(x),$$

essendo $l_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n$, i polinomi fondamentali di Lagrange di grado n , $\xi \in]a, b[$ e $\pi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$. Ne viene:

$$I(f) = \sum_{i=0}^n I(l_i(x)) f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!} I(f^{(n+1)}(\xi) \pi(x)).$$

Si assume quindi $J_n(f) = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$ con

$$a_i = I(l_i(x)) \quad (7.8)$$

e si ha

$$E_n(f) = \frac{1}{(n+1)!} I(f^{(n+1)}(\xi) \pi(x)). \quad (7.9)$$

I pesi delle formule di Newton-Cotes sono stati calcolati per vari valori di n tramite le (7.8); fino a $n = 7$ (otto punti) i pesi sono positivi, mentre per $n > 7$ compaiono pesi negativi e le formule diventano numericamente instabili, cioè la loro capacità di amplificare gli errori di arrotondamento aumenta.

Una caratteristica importante delle formule di Newton-Cotes risiede nel fatto che per esse il nucleo di Peano $G(t)$ non cambia segno in $[a, b]$, per cui, per l'errore, può utilizzarsi la (7.6): m si determina in base alla definizione, mentre il termine $E_n(x^{m+1})$ si calcola facilmente una volta noti i pesi. In tal modo, indicando con $p = n + 1$ il numero dei nodi, l'errore assume la seguente forma caratteristica

$$E_n(f) = \begin{cases} c_p h^{p+1} f^{(p)}(\theta), & p \text{ pari}, \\ c_p h^{p+2} f^{(p+1)}(\theta), & p \text{ dispari}, \end{cases}$$

con c_p costante dipendente da p .

Si osservi come la (7.9), invece, non possa mettersi in una forma più semplice, tranne che nel caso $n = 1$, in cui $\pi(x)$ ha segno costante e quindi, applicando il teorema della media, la funzione $f^{(2)}(\xi)$ può essere portata fuori dal segno di integrale.

Notiamo infine che le formule di Newton-Cotes qui definite vengono dette *chiuse*, per distinguerle da formule analoghe dette *aperte* in cui si ha $a < x_0 < x_1 < \dots < x_n < b$.

Di seguito si riportano le prime sette formule chiuse con i relativi errori.
Formula trapezoidale:

$$I(f) = \frac{b-a}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{1}{12} h^3 f^{(2)}(\theta).$$

Formula di Simpson:

$$I(f) = \frac{b-a}{6} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\theta).$$

Formula dei 3/8 o "pulcherrima":

$$I(f) = \frac{b-a}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\theta).$$

Formula di Milne-Boole:

$$\begin{aligned} I(f) = & \frac{b-a}{90} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] \\ & - \frac{8}{945} h^7 f^{(6)}(\theta). \end{aligned}$$

Formula dei sei punti:

$$\begin{aligned} I(f) = & \frac{b-a}{288} [19f(x_0) + 75f(x_1) + 50f(x_2) + 50f(x_3) + 75f(x_4) \\ & + 19f(x_5)] - \frac{275}{12096} h^7 f^{(6)}(\theta). \end{aligned}$$

Formula di Weddle:

$$\begin{aligned} I(f) = & \frac{b-a}{840} [41f(x_0) + 216f(x_1) + 27f(x_2) + 272f(x_3) + 27f(x_4) \\ & + 216f(x_5) + 41f(x_6)] - \frac{9}{1400} h^9 f^{(8)}(\theta). \end{aligned}$$

Formula degli otto punti:

$$I(f) = \frac{b-a}{17280} [751f(x_0) + 3577f(x_1) + 1323f(x_2) + 2989f(x_3) + 2989f(x_4) + 1323f(x_5) + 3577f(x_6) + 751f(x_7)] - \frac{8183}{518400} h^9 f^{(8)}(\theta).$$

Se, per una formula a $n+1$ punti, il passo di integrazione $h = (b-a)/n$ risulta troppo ampio, si divide $[a, b]$ in m parti uguali, mediante i punti $x_0 = a < x_1 < \dots < x_m = b$, e si utilizza la proprietà

$$I(f) = \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx.$$

Si ottengono quindi le cosiddette *formule di Newton-Cotes generalizzate* applicando una stessa formula a $n+1$ punti per ognuno degli m integrali a secondo membro. Si hanno così $nm+1$ nodi con un passo $h = (b-a)/nm$.

Le formule più usate sono la formula trapezoidale ($n=1$) e quella di Simpson ($n=2$) le quali danno luogo alle corrispondenti formule generalizzate:

$$I(f) = \frac{b-a}{2m} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(x_m) \right] - \frac{(b-a)^3}{12m^2} f^{(2)}(\tau); \quad (7.10)$$

$$I(f) = \frac{b-a}{6m} \left[f(x_0) + 4 \sum_{i=0}^{m-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(x_m) \right] - \frac{(b-a)^5}{2880m^4} f^{(4)}(\tau).$$

Queste due formule generalizzate presentano il vantaggio di un errore che tende a zero al crescere di m . Si noti che da $h = (b-a)/nm$ segue che gli errori sono rispettivamente dell'ordine di h^2 e di h^4 .

7.3 Applicazione della estrapolazione all'integrazione

Si può dimostrare che se $f(x)$ è sufficientemente regolare in $[a, b]$, l'errore della formula generalizzata (7.10) ammette uno sviluppo in serie di potenze

pari di h . Più precisamente, scrivendo per semplicità I invece di $I(f)$ e ponendo

$$J_0^{(1)} = \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(x_m) \right], \quad (7.11)$$

si può dimostrare il seguente teorema.

Teorema 7.3.1 *Se $f(x) \in C^{2r+2}([a, b])$, la (7.10) può scriversi*

$$I = J_0^{(1)} + \alpha_1^{(1)} h^2 + \alpha_2^{(1)} h^4 + \cdots + \alpha_r^{(1)} h^{2r} + O(h^{2r+2}) \quad (7.12)$$

dove $\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \dots, \alpha_r^{(1)}$, non dipendono da h .

La (7.12) oltre a mostrare, come già osservato, che l'errore di $J_0^{(1)}$ è dell'ordine di h^2 , consente di ottenere, con un costo computazionale relativamente contenuto, stime di I migliori della (7.11) per mezzo della *tecnica di estrapolazione*.

Scelto l'intero $q > 1$, la formula trapezoidale generalizzata, con il passo $h/q = (b - a)/mq$, fornisce la stima di I ,

$$J_1^{(1)} = \frac{h}{2q} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{mq-1} f(x_i) + f(x_{mq}) \right],$$

dove ora i nodi sono $x_i = a + i\frac{h}{q}$, $i = 0, 1, \dots, mq$. D'altra parte, per il Teorema 7.3.1, si può scrivere

$$I = J_1^{(1)} + \alpha_1^{(1)} \left(\frac{h}{q}\right)^2 + \alpha_2^{(1)} \left(\frac{h}{q}\right)^4 + \cdots + \alpha_r^{(1)} \left(\frac{h}{q}\right)^{2r} + O(h^{2r+2}). \quad (7.13)$$

Eliminando il termine $\alpha_1^{(1)} h^2$ fra la (7.12) e la (7.13) si ottiene

$$I = J_0^{(2)} + \alpha_2^{(2)} h^4 + \cdots + \alpha_r^{(2)} h^{2r} + O(h^{2r+2}), \quad (7.14)$$

dove si è posto

$$J_0^{(2)} = \frac{q^2 J_1^{(1)} - J_0^{(1)}}{q^2 - 1} \quad (7.15)$$

e dove i nuovi coefficienti, $\alpha_2^{(2)}, \dots, \alpha_r^{(2)}$, non dipendono da h .

La (7.14) mostra che l'errore di $J_0^{(2)}$ è dell'ordine di h^4 , cioè è una stima di I migliore di $J_0^{(1)}$ e $J_1^{(1)}$, mentre la (7.15) implica un costo computazionale

di solo 3 operazioni essenziali; per contro, una stima di I più accurata di $J_1^{(1)}$, mediante la formula trapezoidale, implica necessariamente l'uso di un passo minore di h/q e quindi un costo computazionale più elevato di quello richiesto dalla (7.15).

Il procedimento di estrapolazione può essere ripetuto: ad ogni applicazione, l'ordine dell'errore della nuova stima di I aumenta di due. Infatti, con il passo h/q^2 , dalla formula trapezoidale generalizzata, si ricava $J_2^{(1)}$ mentre il Teorema 7.3.1 fornisce

$$I = J_2^{(1)} + \alpha_1^{(1)} \left(\frac{h}{q^2} \right)^2 + \alpha_2^{(1)} \left(\frac{h}{q^2} \right)^4 + \cdots + \alpha_r^{(1)} \left(\frac{h}{q^2} \right)^{2r} + O(h^{2r+2});$$

eliminando $\alpha_1^{(1)}(h/q)^2$ fra questa relazione e la (7.13) si ha

$$I = J_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} \left(\frac{h}{q} \right)^4 + \cdots + \alpha_r^{(2)} \left(\frac{h}{q} \right)^{2r} + O(h^{2r+2}) \quad (7.16)$$

dove

$$J_1^{(2)} = \frac{q^2 J_2^{(1)} - J_1^{(1)}}{q^2 - 1};$$

eliminando ora $\alpha_2^{(2)}h^4$ fra la (7.14) e la (7.16) si può scrivere

$$I = J_0^{(3)} + \alpha_3^{(3)}h^6 + \cdots + \alpha_r^{(3)}h^{2r} + O(h^{2r+2})$$

dove

$$J_0^{(3)} = \frac{q^4 J_1^{(2)} - J_0^{(2)}}{q^4 - 1},$$

con $\alpha_3^{(3)}, \dots, \alpha_r^{(3)}$ indipendenti da h .

Nella sua formulazione più generale, la tecnica di estrapolazione consiste, fissato l'intero $N < r$, nel calcolare, mediante la formula trapezoidale generalizzata, i valori

$$J_0^{(1)}, J_1^{(1)}, \dots, J_N^{(1)}, \quad (7.17)$$

corrispondenti ai passi $h, h/q, \dots, h/q^N$ (questa è la parte più costosa del metodo), quindi, a partire dai valori (7.17), si costruiscono nuove approssimazioni di I in base allo schema

$$J_i^{(k+1)} = \frac{q^{2k} J_{i+1}^{(k)} - J_i^{(k)}}{q^{2k} - 1}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (7.18)$$

dove, per ciascun valore di k , l'indice i assume successivamente valori $0, 1, \dots, N-k$.

Dalle considerazioni precedenti si deduce che $J_i^{(k+1)}$ presenta un errore dell'ordine di $(h/q^i)^{2(k+1)}$.

È importante rilevare inoltre che la conoscenza di due delle approssimazioni (7.17), consente di stimare l'errore di entrambe, senza la necessità di conoscere le derivate di $f(x)$.

Per esempio, supposto di aver calcolato $J_0^{(1)}$ e $J_1^{(1)}$, dalle (7.12) e (7.13) si ha

$$\begin{aligned} I &\simeq J_0^{(1)} + \alpha_1^{(1)} h^2, \\ I &\simeq J_1^{(1)} + \alpha_1^{(1)} (h/q)^2. \end{aligned}$$

Evidentemente $\alpha_1^{(1)} h^2$ e $\alpha_1^{(1)} (h/q)^2$ forniscono stime dell'errore rispettivamente di $J_0^{(1)}$ e di $J_1^{(1)}$, non appena si calcoli il valore di α_1 . A tale scopo, eliminando I fra le due relazioni, si ottiene

$$\alpha_1^{(1)} \simeq \frac{J_0^{(1)} - J_1^{(1)}}{\left(\frac{h}{q}\right)^2 - h^2}.$$

Comunemente vengono usati i valori $q = 2$ o $q = 4$ (cfr. Esempio 7.6.3).

Le approssimazioni di I ottenute col processo di estrapolazione, note come *formule di Romberg*, costituiscono una speciale applicazione di un procedimento generale, detto *estrapolazione di Richardson*. Tale procedimento può essere impiegato in tutti quei casi in cui una grandezza T si possa approssimare con un valore $\tau_0^{(1)}$ dipendente da un parametro h , e l'errore $T - \tau_0^{(1)}$ sia sviluppabile in serie di potenze di h , cioè si abbia

$$T = \tau_0^{(1)} + \beta_1^{(1)} h^{r_1} + \beta_2^{(1)} h^{r_2} + \dots$$

con $\beta_1^{(1)}, \beta_2^{(1)}, \dots$, non dipendenti da h e $0 < r_1 < r_2 < \dots$ interi. La costruzione di approssimazioni di T più accurate di $\tau_0^{(1)}$ si ottiene con uno schema analogo a quello definito dalla (7.18).

7.4 Formule di quadratura di tipo gaussiano

Si premettono brevemente alcune definizioni e proprietà di una particolare classe di polinomi.

Sia $\rho(x)$ una funzione peso che verifichi le ipotesi fatte in 7.1.

Si indichi con Π lo spazio vettoriale dei polinomi algebrici a coefficienti reali e sia $[a, b]$ un intervallo, non necessariamente limitato. Per ogni coppia $r(x), s(x) \in \Pi$ si consideri il prodotto scalare

$$\langle r, s \rangle = \langle s, r \rangle = I(\rho rs) = \int_a^b \rho(x) r(x) s(x) dx. \quad (7.19)$$

Si definisce quindi la classe dei *polinomi ortogonali* Π^* come l'insieme dei polinomi algebrici, a coefficienti reali, ortogonali rispetto al prodotto scalare (7.19), cioè

$$\Pi^* = \{q_i(x) \mid \text{grado di } q_i = i; \langle q_i, q_j \rangle = 0, \text{ per } i \neq j; i, j = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Dati $[a, b]$ e $\rho(x)$, gli elementi di Π^* restano definiti a meno di una costante moltiplicativa e costituiscono una base per Π ; per essi valgono le seguenti proprietà:

$$\langle p, q_n \rangle = 0 \quad \forall p \in \Pi_{n-1}; \quad (7.20)$$

$$q_n(x) \quad \text{ha } n \text{ zeri reali e distinti in }]a, b[. \quad (7.21)$$

Come osservato in 7.1, fissati $\rho(x)$, $[a, b]$ ed n , risulta univocamente determinata la formula di quadratura di grado di precisione almeno $2n + 1$

$$I(\rho f) = \int_a^b \rho(x) f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) = J_n(f),$$

che propriamente dicesi *formula di quadratura gaussiana*.

Teorema 7.4.1 *Dati $[a, b]$ e $\rho(x)$, sia $f(x) \in C^{2n+2}(]a, b[)$ e $J_n(f)$ una formula di quadratura gaussiana; allora i nodi x_0, x_1, \dots, x_n sono gli zeri di $q_{n+1}(x) \in \Pi^*$, i pesi sono positivi e dati da*

$$a_i = I(\rho l_i^2), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

dove $l_i(x)$ sono i polinomi fondamentali di Lagrange relativi ai detti nodi e il grado di precisione è esattamente $2n + 1$, essendo

$$E_n(f) = K_n \frac{f^{(2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!}, \quad K_n > 0, \quad \theta \in]a, b[, \quad (7.22)$$

l'errore della formula.

DIMOSTRAZIONE. Siano x_0, x_1, \dots, x_n , gli zeri di $q_{n+1}(x)$; relativamente a questi punti si considerano i polinomi fondamentali di Lagrange (cfr. 6.2) di grado n

$$l_i(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n) / \alpha_i$$

con $\alpha_i = (x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)$, $i = 0, 1, \dots, n$, e le funzioni fondamentali dell'interpolazione di Hermite (cfr. 6.3) di grado $2n + 1$ di prima e di seconda specie

$$h_{0i}(x) = [1 - 2l'_i(x_i)(x - x_i)]l_i^2(x), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

$$h_{1i}(x) = (x - x_i)l_i^2(x), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Evidentemente $q_{n+1}(x)$ e $\pi(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$ differiscono per una costante moltiplicativa c_{n+1} , per cui si può scrivere

$$q_{n+1}(x) = c_{n+1}\pi(x) = c_{n+1}\alpha_i(x - x_i)l_i(x).$$

Pertanto, per quanto riguarda le funzioni fondamentali di Hermite di prima specie, risulta

$$I(\rho h_{0i}) = I(\rho l_i^2) - \frac{2l'_i(x_i)}{c_{n+1}\alpha_i} I(\rho q_{n+1}l_i), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

avendosi $\alpha_i \neq 0$ per la proprietà (7.21).

D'altra parte si ha $I(\rho q_{n+1}l_i) = \langle q_{n+1}, l_i \rangle = 0$ per la (7.20), in quanto $l_i(x) \in \Pi_n$, per cui

$$I(\rho h_{0i}) = I(\rho l_i^2), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (7.23)$$

Per le funzioni di seconda specie risulta

$$I(\rho h_{1i}) = \frac{1}{c_{n+1}\alpha_i} I(\rho q_{n+1}l_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (7.24)$$

Ricordando che (cfr. Teorema 6.3.3)

$$f(x) = \sum_{i=0}^n h_{0i}(x)f(x_i) + \sum_{i=0}^n h_{1i}(x)f'(x_i) + \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\pi^2(x),$$

con $\xi \in]a, b[$, e tenendo conto dei risultati (7.23) e (7.24) nonché della proprietà additiva degli integrali, si ha

$$I(\rho f) = \sum_{i=0}^n I(\rho l_i^2)f(x_i) + I\left(\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\rho\pi^2\right).$$

Poiché $\rho(x)\pi^2(x)$ non cambia segno nell'intervallo di integrazione, nel secondo termine a secondo membro può applicarsi il teorema della media e scrivere

$$I\left(\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\rho\pi^2\right) = \frac{f^{(2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!}I(\rho\pi^2), \quad \theta \in]a, b[.$$

Ponendo quindi

$$a_i = I(\rho l_i^2), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

$$K_n = I(\rho\pi^2), \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$E_n(f) = K_n \frac{f^{(2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!},$$

si ha infine

$$I(\rho f) = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + E_n(f)$$

dove $a_i > 0$, $i = 0, 1, \dots, n$, $K_n > 0$, $n = 0, 1, \dots$ □

Le formule aventi i pesi e i nodi definiti come nel Teorema 7.4.1 coincidono con quelle della formulazione algebrica data in 7.1. L'ipotesi di derivabilità, richiesta dal teorema, consente quindi una rappresentazione dell'errore nella forma (7.22) ma non è necessaria per la definizione della formula.

Nella tavola che segue si riportano le caratteristiche di alcuni polinomi ortogonali fra i più usati, che danno luogo alle corrispondenti formule di quadratura gaussiane da cui prendono il nome (nella tavola il simbolo π sta per 3.141592...).

Intervallo	Peso	Classificazione	K_n
$[-1, 1]$	$1/\sqrt{1-x^2}$	Chebyshev 1 ^a specie	$\pi/2^{2n+1}$
$[-1, 1]$	$\sqrt{1-x^2}$	Chebyshev 2 ^a specie	$\pi/2^{2n+3}$
$[-1, 1]$	1	Legendre	$\frac{2^{2n+3}[(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^2}$
$[0, +\infty[$	e^{-x}	Laguerre	$[(n+1)!]^2$
$] -\infty, +\infty[$	e^{-x^2}	Hermite	$(n+1)!\sqrt{\pi}/2^{n+1}$

Osservazione 7.4.1 Nodi e pesi delle formule gaussiane sono numeri irrazionali e sono stati calcolati in precisione multipla per vari valori di n . Essi

sono inseriti nei principali programmi di calcolo per l'integrazione approssimata. L'uso di tali formule per via automatica non presenta quindi alcuna difficoltà.

Osservazione 7.4.2 Per ragioni di convenienza, per gli integrali estesi ad un intervallo limitato $[a, b]$, si usano polinomi ortogonali definiti in $[-1, 1]$. In effetti ogni intervallo di integrazione $a \leq t \leq b$ può ricondursi all'intervallo $-1 \leq x \leq 1$ con la trasformazione $t = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}$ e la funzione $\rho(x)$ può essere comunque introdotta. Risulta infatti

$$\int_a^b g(t)dt = \int_{-1}^1 \rho(x)f(x)dx$$

ove si assuma $f(x) = \frac{b-a}{2\rho(x)}g\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right)$.

Si noti poi che l'integrazione gaussiana, basata sui polinomi di Laguerre e di Hermite, permette di approssimare integrali su intervalli non limitati (purché, naturalmente, l'integrale esista finito).

Osservazione 7.4.3 La positività dei pesi consente di dimostrare, sotto ipotesi molto generali, la convergenza di $J_n(f)$.

Più precisamente, nel caso di intervalli limitati $[a, b]$ e per formule di grado $2n + 1$, la semplice continuità di $f(x)$ è condizione sufficiente affinché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n(f) = I(\rho f) .$$

Pertanto l'errore $E_n(f)$ tende a zero per $n \rightarrow \infty$ anche nel caso che $f(x)$ non sia derivabile e quindi $E_n(f)$ non possa esprimersi nella forma (7.22).

Inoltre, nel caso di intervalli di integrazione non limitati, vale il seguente teorema relativo alle formula di Gauss-Laguerre.

Teorema 7.4.2 *Se esiste un numero reale $\alpha > 1$ ed un x^* tali che $|f(x)| \leq e^x/x^\alpha$ per $x > x^*$ e se $f(x) \in C^0([0, +\infty[)$, allora per la formula di quadratura di Gauss-Laguerre risulta*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n(f) = I(e^{-x}f) .$$

7.5 Integrazione in più dimensioni

L'approssimazione di integrali multipli, della forma cioè

$$I(\rho f) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_r}^{b_r} \rho(x_1, \dots, x_r) f(x_1, \dots, x_r) dx_1 \dots dx_r$$

con $\rho(x_1, \dots, x_r) \geq 0$ per $x_i \in [a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, r$, presenta difficoltà e costi computazionali assai più elevati rispetto al caso monodimensionale.

Ci si limita qui, per semplicità, ad accennare il problema nel caso bidimensionale con peso unitario e dominio di integrazione rettangolare.

Sia $f(x, y)$ integrabile su $[a, b] \times [c, d]$ con $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$.

Sia J_k una formula di quadratura monodimensionale con $k + 1$ nodi $x_i \in [a, b]$ e pesi a_i , $i = 0, 1, \dots, k$, e J_n una con $n + 1$ nodi $y_j \in [c, d]$ e pesi b_j , $j = 0, 1, \dots, n$.

In base al teorema di riduzione degli integrali doppi, risulta evidentemente

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \\ &\simeq \int_a^b \sum_{j=0}^n b_j f(x, y_j) dx \simeq \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^n a_i b_j f(x_i, y_j) \\ &= J_k J_n(f). \end{aligned} \tag{7.25}$$

$J_k J_n(f)$ dicesi *formula di cubatura* e l'errore è

$$E_{k,n}(f) = I(f) - J_k J_n(f).$$

Quindi, ad esempio, se J_2 è la formula di quadratura di Simpson si ha

$$\begin{aligned} J_2 J_2(f) &= \frac{(b-a)(d-c)}{36} [f(x_0, y_0) + 4f(x_0, y_1) + f(x_0, y_2) \\ &\quad + 4f(x_1, y_0) + 16f(x_1, y_1) + 4f(x_1, y_2) + f(x_2, y_0) \\ &\quad + 4f(x_2, y_1) + f(x_2, y_2)]. \end{aligned}$$

Se inoltre $f(x, y)$ è sufficientemente regolare si può dimostrare che l'errore è dato da

$$E_{2,2}(f) = -\frac{hk}{45} \left[h^4 \frac{\partial^4 f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x^4} + k^4 \frac{\partial^4 f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y^4} \right]$$

con $\bar{x}, \bar{\bar{x}} \in]a, b[$, $\bar{y}, \bar{\bar{y}} \in]c, d[$, e $h = (b - a)/2$, $k = (d - c)/2$.

Formule di cubatura possono essere costruite anche direttamente. Per esempio, considerati i punti $P_r \in [a, b] \times [c, d]$, $r = 0, 1, \dots, N$, si cercano formule del tipo

$$I(f) \simeq J_N(f) = \sum_{r=0}^N c_r f(P_r). \quad (7.26)$$

I nodi P_r ed i pesi c_r sono determinati in modo che la (7.26) sia esatta quando $f(P)$ è un polinomio di grado non superiore a g nelle due variabili x e y , cioè in modo che sia

$$E_N(x^\alpha y^\beta) = 0, \quad 0 \leq \alpha + \beta \leq g,$$

dove $E_N(f) = I(f) - J_N(f)$.

Si osservi tuttavia che se J_n è una formula di quadratura con grado di precisione m , ossia se risulta

$$J_n(f) = \sum_{i=0}^n a_i x_i^\alpha = I(x^\alpha), \quad \alpha = 0, 1, \dots, m,$$

allora, facendo riferimento, per semplicità, ad un dominio di integrazione quadrato, si verifica facilmente che

$$J_n J_n(x^\alpha y^\beta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j x_i^\alpha x_j^\beta = I(x^\alpha y^\beta), \quad 0 \leq \alpha, \beta \leq m. \quad (7.27)$$

La $J_n J_n(f)$, detta *formula del prodotto cartesiano*, è della forma (7.26) ove si usino gli $N + 1 = (n + 1)^2$ nodi $P_{ij} = (x_i, x_j)$ con i pesi $a_i a_j$ e risulta esatta per polinomi fino al grado $2m$.

Ad esempio, nel caso $[a, b] = [-1, 1]$ e $n = 1$, la formula di quadratura di Gauss-Legendre J_1 ha nodi e pesi

$$-x_0 = x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad a_0 = a_1 = 1$$

e grado di precisione $m = 3$.

Con $[c, d] = [-1, 1]$ la formula di cubatura $J_1 J_1$ ha $N + 1 = 2^2 = 4$ nodi dati da

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

con coefficienti unitari; essa inoltre risulta esatta per ogni monomio del tipo $x^\alpha y^\beta$ con $0 \leq \alpha, \beta \leq 3$ ed è esplicitamente data da

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy \\ &\simeq f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ &\quad + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right). \end{aligned}$$

7.6 Complementi ed esempi

7.6.1 Costruzione di formule e calcolo dell'errore

Un approccio algebrico analogo a quello che conduce al sistema (7.4) consente la costruzione di formule di quadratura più generali di quelle viste finora, potendosi utilizzare anche i valori di una o più derivate come nell'esempio seguente.

Esempio 7.6.1 Si vogliono calcolare i pesi e i nodi della formula

$$I(f) = \int_0^1 f(x) dx \simeq a_0 f(0) + \frac{1}{6} f'(x_1) + \frac{1}{6} f'(x_2) + a_1 f(1) = J(f)$$

in modo che sia massimo il grado di precisione.

Imponendo $E(x^r) = I(x^r) - J(x^r) = 0$, $r = 0, 1, 2, 3$, si trova subito $a_0 = 5/6$, $a_1 = 1/6$, ed inoltre si ha

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1/2 \\ x_1^2 + x_2^2 &= 1/6 \end{aligned}$$

da cui $x_1 = (3 - \sqrt{3})/12$ e $x_2 = (3 + \sqrt{3})/12$.

Poiché risulta $E(x^4) = -1/120$, la formula ha grado di precisione $m = 3$.

□

Il Teorema 7.1.1 indica una procedura generale per calcolare l'errore di una formula di quadratura quando $f(x)$ sia sufficientemente regolare.

Esempio 7.6.2 Si vuole calcolare l'errore $E_2(f) = I(f) - J_2(f)$ della formula di Simpson

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx \simeq \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) = J_2(f).$$

Ponendo $f(x) = x^r$, si trova $E_2(x^r) = 0$, $r = 0, 1, 2, 3$, ed $E_2(x^4) = -4/15$, per cui il grado di precisione è $m = 3$.

Il nucleo di Peano è dato da

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_t^1 (x-t)^3 dx - \frac{4}{3}(0-t)^3 - \frac{1}{3}(1-t)^3 \\ &= \frac{1}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{12} \quad \text{per } -1 \leq t < 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_t^1 (x-t)^3 dx - \frac{1}{3}(1-t)^3 \\ &= \frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{12} \quad \text{per } 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Poiché $G(t)$ ha segno costante in $] -1, 1[$, dalla (7.6) si ricava

$$E_2(f) = -\frac{1}{90}f^{(4)}(\theta), \quad \theta \in] -1, 1[.$$

□

Esempio 7.6.3 Si consideri

$$I(f) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x},$$

il cui valore esatto è $I(f) = \log 2 = 0.69314718 \dots$

Posto, nella (7.17), $N = 2$, si calcolano, $J_0^{(1)}$, $J_1^{(1)}$ e $J_2^{(1)}$ con $h = 1/2$ e $q = 2$. Applicando la (7.18), per $k = 1, 2$, si ottengono i seguenti valori estrapolati:

$$J_0^{(1)} = 0.70833333 \dots$$

$$J_1^{(1)} = 0.69702380 \dots \quad J_0^{(2)} = 0.69325396 \dots$$

$$J_2^{(1)} = 0.69412185 \dots \quad J_1^{(2)} = 0.69315453 \dots \quad J_0^{(3)} = 0.69314790 \dots$$

Si noti che i valori $J_0^{(2)}$ e $J_0^{(3)}$ sono più accurati di quelli aventi l'indice superiore più piccolo (in particolare $J_0^{(2)}$ è una approssimazione migliore di $J_2^{(1)}$ che ha un costo computazionale maggiore).

Come osservato in 7.3, una stima dell'errore di $J_1^{(1)}$ basata sui valori $J_0^{(1)}$ e $J_1^{(1)}$ può ottenersi calcolando

$$\alpha_1^{(1)} \simeq \frac{J_1^{(1)} - J_0^{(1)}}{h^2 - h^2/4} \simeq -0.0603175$$

da cui

$$E(f) = I - J_1^{(1)} \simeq \alpha_1^{(1)} \frac{h^2}{4} \simeq -0.00377.$$

In modo analogo si può ottenere una stima dell'errore di $J_2^{(1)}$ utilizzando la coppia $J_2^{(1)}, J_0^{(1)}$ oppure $J_2^{(1)}, J_1^{(1)}$. \square

Esempio 7.6.4 Si vuole calcolare il numero minimo $n + 1$ di nodi per approssimare, con una formula di quadratura di tipo gaussiano, l'integrale

$$I(f) = \int_0^1 \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x(x+1)}} dx$$

in modo che risulti $|E_n| \leq 10^{-5}$.

Si trasforma l'intervallo $]0, 1[$ nell'intervallo $] - 1, 1[$ con la sostituzione $t = 2x - 1$. Si ha quindi

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_0^1 \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x(x+1)}} dx \\ &= \int_{-1}^1 \log\left(\frac{t+3}{2}\right) \sqrt{\frac{1-t}{3+t}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \sqrt{\frac{1-\tau}{3+\tau}} \int_{-1}^1 \log\left(\frac{t+3}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad \tau \in]-1, 1[, \end{aligned}$$

dove si è potuto applicare il teorema della media in quanto le funzioni $g(t) = \log\left(\frac{t+3}{2}\right)$ e $\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ non cambiano segno in $] - 1, 1[$. Posto $h(\tau) = \sqrt{\frac{1-\tau}{3+\tau}}$,

si può considerare una formula di quadratura di Gauss-Chebyshev di prima specie e scrivere

$$I(f) = h(\tau)I(\rho g) = h(\tau) \left[J_n(g) + K_n \frac{g^{(2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!} \right]$$

con $K_n = \pi/2^{2n+1}$.

Pertanto $I(f) \simeq h(\tau)J_n(g)$ e inoltre, avendosi $0 \leq h(\tau) \leq 1$ e $|g^{(k)}(t)| \leq \frac{(k-1)!}{2^k}$, $k = 0, 1, \dots$, si può verificare che, per l'errore, risulta

$$|E_n| = \left| K_n h(\tau) \frac{g^{(2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!} \right| \leq 6 \times 10^{-6}$$

con $n = 3$, ossia con 4 nodi. □

Nell'integrazione gaussiana la scelta del peso, e quindi della formula, può risultare determinante ai fini dell'errore. Si consideri, ad esempio, l'integrale

$$I(f) = \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$$

il cui valore esatto è $\pi/8 = 0.39269908 \dots$

Con una formula a due nodi di Gauss-Chebyshev di seconda specie ($\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$), si ottiene

$$I(f) = I(\sqrt{1-x^2} x^2) = J_1(x^2).$$

Utilizzando una formula a tre nodi di Gauss-Chebyshev di prima specie ($\rho(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$), risulta

$$I(f) = I\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(x^2[1-x^2])\right) = J_2(x^2(1-x^2)).$$

Quindi gli errori delle precedenti due formule sono nulli.

Per contro, con una formula di Gauss-Legendre con quattro nodi, si ha

$$I(f) \simeq J_3(x^2 \sqrt{1-x^2}) = 0.40405278 \dots,$$

con un errore $E_3(f) \simeq -1.1 \times 10^{-2}$.

Esempio 7.6.5 Si vogliono calcolare i pesi della formula

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz &\simeq c_0 f(a, a, a) + c_1 f(b, 0, 0) \\ &\quad + c_2 f(0, b, 0) + c_3 f(0, 0, b) . \end{aligned}$$

Allo scopo si impone che la formula sia esatta per $f(x, y, z) = 1, x, y, z$.
Ne viene il sistema

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 + c_2 + c_3 &= (b-a)^3 \\ c_0 a + c_1 b &= \frac{1}{2}(b-a)^3(b+a) \\ c_0 a + c_2 b &= \frac{1}{2}(b-a)^3(b+a) \\ c_0 a + c_3 b &= \frac{1}{2}(b-a)^3(b+a) \end{aligned}$$

che ha soluzione solo se $b \neq 3a$; in tal caso si ottiene

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{(b-a)^3(-b-3a)}{2(b-3a)} , \\ c_i &= \frac{(b-a)^4}{2(b-3a)} , \quad i = 1, 2, 3 . \end{aligned}$$

□

7.6.2 Integrali impropri

Le formule viste per l'integrazione approssimata non sempre sono adatte per essere utilizzate direttamente per il calcolo di un integrale improprio. Per esempio, nel caso di singolarità della funzione integranda, la presenza di punti singolari crea difficoltà nella scelta dei nodi e può compromettere la convergenza della formula.

Talvolta la singolarità è facilmente rimuovibile con una semplice sostituzione come nell'integrale

$$I(f) = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/\alpha}} , \quad \alpha \geq 2 ,$$

che, con la posizione $x = t^\alpha$, diviene

$$I(f) = \alpha \int_0^1 t^{\alpha-2} dt .$$

In altri casi si può ricorrere ad una formula gaussiana opportunamente pesata: l'integrale

$$I(f) = \int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x}} dx$$

può scriversi

$$I(f) = I\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}g(x)\right)$$

con $g(x) = e^x\sqrt{1+x}$ e quindi essere approssimato con una formula di quadratura di Gauss-Chebyshev di prima specie.

Altri due metodi sono proposti nei due esempi che seguono.

Esempio 7.6.6 Si considera l'integrale

$$I(f) = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x}} dx.$$

Con una integrazione per parti, scegliendo e^{-x} come fattore finito, si ottiene

$$I(f) = 2 - 2I(g) \tag{7.28}$$

dove si è posto $g(x) = e^{-x}\sqrt{1-x} \in C^0([0, 1])$.

È da notare, tuttavia, che $g(x)$ non è derivabile per $x = 1$ per cui la stima dell'errore, per esempio mediante la (7.5) o la (7.22), può essere difficile. Per ovviare a questo inconveniente si può procedere a due ulteriori integrazioni per parti, applicate a $I(g)$, portando la (7.28) nella forma

$$I(f) = \frac{18}{15} - \frac{8}{15}I(s),$$

dove $s(x) = e^{-x}\sqrt{(1-x)^5} \in C^2([0, 1])$.

L'approssimazione di $I(s)$ mediante la formula generalizzata (7.10), con $m = 8$, fornisce il seguente risultato

$$I(s) \simeq 0.231851$$

con un errore assoluto, in modulo, inferiore a 10^{-4} . □

Gli integrali della forma,

$$I(f) = \int_a^b \frac{g(x)}{(x-a)^\beta} dx$$

con $0 < \beta < 1$ e $g(x)$ regolare in $[a, b]$, possono essere affrontati sottraendo dal numeratore uno o più termini dello sviluppo di Taylor di $g(x)$ con punto iniziale $x = a$; questa tecnica va sotto il nome di *metodo della sottrazione della singolarità*.

Esempio 7.6.7 L'integrale

$$I(f) = \int_0^1 \frac{e^x}{x^\beta} dx$$

con $0 < \beta < 1$ può scriversi

$$I(f) = I(r) + I(s)$$

con $r(x) = (e^x - 1)/x^\beta$ e $s(x) = 1/x^\beta$.

Ponendo $r(0) = 0$, risulta, per prolungamento, $r(x) \in C^0([0, 1])$ in quanto $\lim_{x \rightarrow 0} r(x) = 0$ e inoltre si ha $I(s) = 1/(1 - \beta)$.

Si noti tuttavia che $r(x)$ non è della classe $C^1([0, 1])$: se si richiede per $r(x)$ una maggiore regolarità conviene porre

$$r(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^\beta}, \quad s(x) = \frac{1}{x^\beta} + \frac{1}{x^{\beta-1}},$$

dove al numeratore di $r(x)$ si è sottratto un ulteriore termine dello sviluppo in serie di e^x .

In tal caso si ha $r(x) \in C^1([0, 1])$ e $I(s) = (3 - 2\beta)/[(1 - \beta)(2 - \beta)]$. □

Un altro tipo di integrale improprio si ha quando l'intervallo di integrazione non è limitato. Possono allora risultare utili le formule gaussiane di Laguerre e di Hermite.

Esempio 7.6.8 Sia

$$I(f) = \int_0^\infty \sin(x^2) dx$$

il cui valore esatto è $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 0.626657 \dots$

Con evidenti passaggi può scriversi

$$I(f) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} g(x) dx \cong \frac{1}{2} J_n(g)$$

dove $g(x) = e^{x^2} \sin(x^2)$ e J_n è una formula di quadratura di Gauss-Hermite. Eseguito i calcoli, con $n = 4$, si trova

$$\frac{1}{2}J_4(g) = 0.626868 \dots$$

□

Alternativamente si può effettuare un troncamento dell'intervallo non limitato, avendo cura di stimare opportunamente la parte tralasciata, come nell'esempio che segue.

Esempio 7.6.9 Si consideri

$$I(f) = \int_0^\infty \frac{\cos x}{\cosh x} dx$$

il cui valore esatto è $\frac{\pi}{2} \operatorname{sech} \frac{\pi}{2}$.

Può scriversi

$$I(f) = I^{(1)}(f) + I^{(2)}(f)$$

con

$$I^{(1)}(f) = \int_0^b \frac{\cos x}{\cosh x} dx, \quad I^{(2)}(f) = \int_b^\infty \frac{\cos x}{\cosh x} dx,$$

e si ha

$$|I^{(2)}(f)| \leq \int_b^\infty \frac{dx}{\cosh x} = 2 \int_b^\infty \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx \leq 2 \int_b^\infty e^{-x} dx = 2e^{-b}.$$

Quindi, ad esempio, con $b = 10$, l'integrale proprio $I^{(1)}(f)$ approssima $I(f)$ con un errore assoluto non superiore a $2e^{-10} \simeq 10^{-4}$. □

Si osservi, come si constata facilmente, che per $x > 3$, risulta

$$\left| e^x \frac{\cos x}{\cosh x} \right| < \frac{e^x}{x^2};$$

quindi, per il Teorema 7.4.2 con $\alpha = 2$ e $x^* = 3$, la formula di Gauss-Laguerre $J_n(f)$ con $f(x) = e^x \frac{\cos x}{\cosh x}$ è convergente all'integrale dell'esempio precedente.

Avendosi $\lim_{n \rightarrow \infty} (J_{n+1}(f) - J_n(f)) = 0$, il numero $|J_{n+1}(f) - J_n(f)|$ può assumersi come una stima del modulo dell'errore assoluto che si commette

approssimando $I(e^{-x}f)$ con $J_{n+1}(f)$.

Applicando la formula con $n = 5$ e $n = 6$, si trova:

$$J_6(f) = 0.6241733 \dots ,$$

$$| J_6(f) - J_5(f) | \simeq 3.9 \times 10^{-3} .$$

L'errore effettivo risulta

$$| I(e^{-x}f) - J_6(f) | \simeq 1.8 \times 10^{-3} .$$

Bibliografia: [6], [8], [29].