

# **Compitini di Teoria dei Sistemi, prof. Zini**

*(Praticò Andrea)*

08/01/2002

# Indice

0.1	22 Dicembre 2001 . . . . .	2
0.2	7 Gennaio 2002 . . . . .	3
0.3	22 Dicembre 2001 . . . . .	4
0.4	07 Gennaio 2002 . . . . .	7

# Tracce Compitini

## 0.1 22 Dicembre 2001

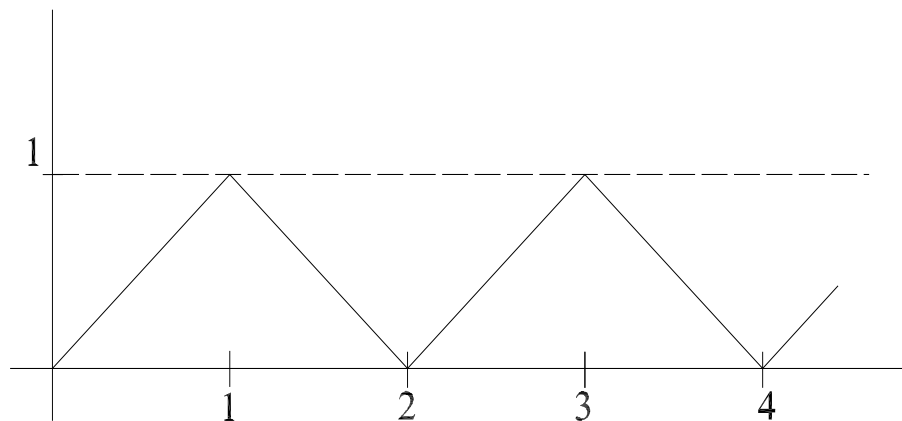
1. Si consideri il seguente sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= 3x_1^2 + x_2 - 4x_1x_2 + ux_1 \\ \dot{x}_2 &= -3x_1x_2 + x_1^2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= (-6 + x_2)x_1 + (x_2 - 11)x_2 - 6x_3 + u \end{cases} \quad y = (1 + x_1)x_2 - x_3$$

- Si verifichi che l'origine dello spazio degli stati, è un equilibrio con ingresso nullo.
  - Si linearizzi il sistema attorno a detto equilibrio.
  - Si decida, se possibile, sulla stabilità dell'equilibrio nell'origine.
2. Si decida sul numero di radici a parte reale positiva e a parte reale negativa del seguente polinomio:

$$\lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

3. Si consideri il seguente segnale periodico:



- Si calcoli la sua  $\mathcal{L}$  trasformata.
  - Si calcolino le sue singolarità polari.
4. Dato il sistema descritto dalla seguente Funzione di Trasferimento:

$$G(s) = \frac{10s(s+1)}{(s+10)^2}$$

- Si calcoli, se esiste, l'uscita di regime per un ingresso a gradino unitario.
- Si calcoli, se esiste, la risposta di regime al seguente ingresso:

$$u(t) = 2 \sin \left( 10t + \frac{\pi}{4} \right)$$

## 0.2 7 Gennaio 2002

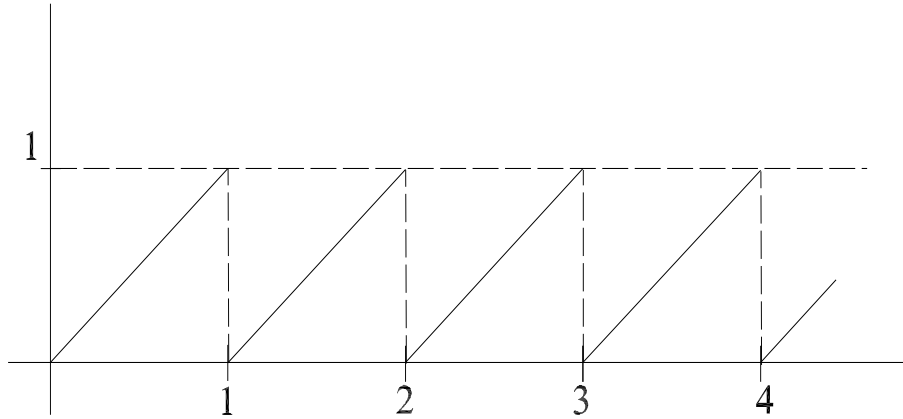
1. Si consideri il seguente sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1^3 + x_2 - 5x_1x_3 + ux_1 \\ \dot{x}_2 = -4x_1^2 + x_2 + x_2^2 + x_3 + x_3u \\ \dot{x}_3 = x_1(x_3 - 6) + x_2(x_2 - 11) - 6x_3 + u \end{cases} \quad y = x_2(1 + x_3) - x_3 + 2u$$

- Si verifichi che l'origine dello spazio degli stati, è un equilibrio con ingresso nullo.
  - Si linearizzi il sistema attorno a detto equilibrio.
  - Si decida, se possibile, sulla stabilità dell'equilibrio nell'origine.
2. Si decida sul numero di radici a parte reale positiva e a parte reale negativa del seguente polinomio:

$$\lambda^6 + \lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 2$$

3. Si consideri il seguente segnale periodico:



- Si calcoli la sua  $\mathcal{L}$  trasformata.
  - Si calcolino le sue singolarità polari.
4. Dato il sistema descritto dalla seguente Funzione di Trasferimento:

$$G(s) = \frac{10s(s+1)}{(s+10)^2}$$

- Si calcoli, se esiste, l'uscita di regime per un ingresso  $u(t) = e^{-t}$ .
- Si calcoli, se esiste, la risposta di regime al seguente ingresso:

$$u(t) = 3 \sin \left( 10t - \frac{\pi}{4} \right)$$

# Risoluzione

## 0.3 22 Dicembre 2001

### 1. Sistema Non Lineare

- Per verificare che l'origine dello spazio degli stati sia un equilibrio del sistema con ingresso nullo, basta sostituire  $\underline{x}_{eq} = [0, 0, 0]$  e  $u = \tilde{u} = 0$ , nelle equazioni, e verificare che esse siano soddisfatte.
- Il sistema linearizzato deve risultare nella forma:

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = cx + du$$

Si considera il sistema, nel seguente modo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, u) = 3x_1^2 + x_2 - 4x_1x_2 + ux_1 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, u) = -3x_1x_2 + x_1^2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3, u) = (-6 + x_2)x_1 + (x_2 - 11)x_2 - 6x_3 + u \end{cases}$$

$$y = f(x_1, x_2, x_3, u) = (1 + x_1)x_2 - x_3$$

si costruisce la Matrice Jacobiana del sistema:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1 - 4x_2 + u & 1 - 4x_1 & 0 \\ -3x_2 + 2x_1 & -3x_1 & 1 \\ -6 + x_2 & x_1 + 2x_2 - 11 & -6 \end{pmatrix}$$

La matrice Jacobiana calcolata nell'origine, con ingresso nullo, vale:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right] = [0, 1, -1]$$

$$d = \frac{\partial f}{\partial u} = 0$$

Il sistema linearizzato risulta essere in forma Compagna di Controllo.

- Il polinomio Caratteristico della matrice  $A$  (che risulta in forma Compagna Orizzontale Inferiore) è:

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$$

si osserva immediatamente che  $\lambda_1 = -1$  è uno zero del polinomio; effettuando la divisione del detto polinomio per  $\lambda + 1$ , si fattorizza nel seguente modo:

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 5\lambda + 6)$$

Gli altri zeri del polinomio sono gli zeri di  $\lambda^2 + 5\lambda + 6$ ; ovvero:

$$\lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = -3$$

Gli Autovalori della Matrice  $A$  sono, quindi, tutti a parte reale Strettamente Negativa, si conclude che l'equilibrio  $[0, 0, 0]$  è Asintoticamente Stabile.

## 2. Polinomio

Si costruisce la Tabella di Hurwitz:

	1	2	3
5	1	1	2
4	1	1	1
3	0	1	0
2			
1			
0			

La terza riga contiene uno zero nella colonna Pivot, ma la stessa riga non è tutta nulla. Si sostituisce lo 0 con un valore infinitesimo  $\epsilon$ .

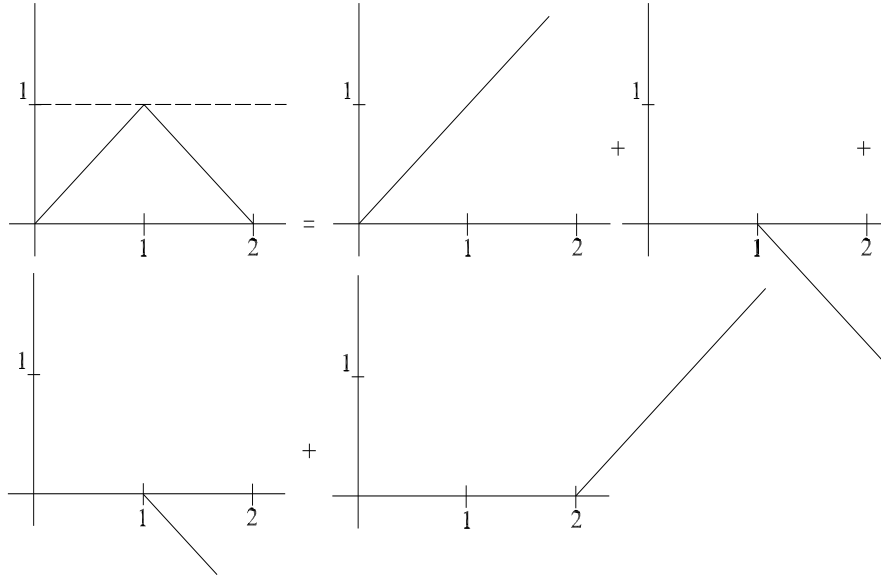
	1	2	3
5	1	1	2
4	1	1	1
3	$\epsilon$	1	0
2	$\frac{\epsilon-1}{\epsilon}$	1	0
1	1	0	
0	1		

$\epsilon \ll 1$ .

Osservando la Colonna Pivot, si conclude che, essendoci 3 Permanenze di segno e 2 Variazioni, il polinomio ha 3 zeri a parte reale strettamente Negativa, e 2 a parte reale strettamente Positiva. Si può concludere dicendo che, se il polinomio dato è caratteristico della Matrice Dinamica di un Sistema Lineare, il sistema stesso è Instabile, per la presenza di Autovalori a parte Reale Strettamente Positiva.

## 3. Segnale Periodico.

- Si considera il segnale in un periodo; esso può essere scomposto nella seguente maniera:



Considerando che si ha a che fare con Rampe unitarie, al più traslate, si calcola immediatamente la  $\mathcal{L}$  trasformata del segnale NEL PERIODO:

$$G_T(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2}e^{-s} + \frac{1}{s^2}e^{-2s}$$

Il segnale complessivo è periodico di periodo  $T = 2$ ; la sua  $\mathcal{L}$  trasformata è data da:

$$G(s) = \frac{G_T(s)}{1 - e^{-Ts}} = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2(1 - e^{-2s})}$$

- Le Singolarità Polari di tale segnale, devono giacere sull'asse immaginario, in quanto si tratta di segnale periodico; per trovare tali Singolarità Polari, si risolve l'equazione:

$$s^2(1 - e^{-2s}) = 0$$

ricordando che  $s$  deve essere del tipo  $s = j\omega$   $\omega \in \mathbb{R}$ :

$$s^2 = 0 \Leftrightarrow s = 0$$

$$1 - e^{-2s} = 0 \Leftrightarrow e^{-2s} = 1 \Rightarrow e^{-2j\omega} = 1 \Rightarrow \cos(-2\omega) + j \sin(-2\omega) = 1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \cos(-2\omega) = \cos(2\omega) & = 1 \\ \sin(-2\omega) = -\sin(2\omega) & = 0 \end{cases}$$

Ovvero:

$$2\omega = 2K\pi \Rightarrow \omega = K\pi \quad K \in \mathbb{Z}$$

Le Singolarità Polari, sono:

$$s = jK\pi \quad K \in \mathbb{Z}$$

#### 4. Funzione di Trasferimento

- L'unico polo della F.d.T. è a parte reale Negativa; il sistema a cui è associata tale F.d.T. è Asintoticamente Stabile, quindi ha senso parlare di Risposta di Regime (considerando anche che l'ingresso, che è il gradino unitario, è una

funzione  $\mathcal{L}$  trasformabile).

Il gradino unitario può essere considerato:

$$u(t) = 1 = e^{0t}$$

ovvero si pone  $\hat{s} = 0$ ; la risposta di regime, è data da:

$$y_r(t) = G(\hat{s})e^{\hat{s}t} = 0 \quad \text{essendo } G(\hat{s}) = G(0) = 0$$

- La risposta di regime, al segnale  $u(t) = 2 \sin(10t + \frac{\pi}{4})$ , è data da:

$$2|G(j\omega)| \sin\left(10t + \frac{\pi}{4} + \arg[G(j\omega)]\right)$$

dove  $G(j\omega) = \frac{1}{2} + j5$  (I° Quadrante), quindi:

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\frac{1}{4} + 25}$$

$$\arg[G(j\omega)] = \arctan(10)$$

## 0.4 07 Gennaio 2002

### 1. Sistema Non Lineare

- Per verificare che l'origine dello spazio degli stati sia un equilibrio del sistema con ingresso nullo, basta sostituire  $\underline{x}_{eq} = [0, 0, 0]$  e  $u = \tilde{u} = 0$ , nelle equazioni, e verificare che esse siano soddisfatte.
- Il sistema linearizzato deve risultare nella forma:

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = cx + du$$

Si considera il sistema, nel seguente modo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, u) = 2x_1^3 + x_2 - 5x_1x_3 + ux_1 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, u) = -4x_1^2x_2 + x_2^2 + x_3 + ux_3 \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3, u) = x_1(x_3 - 6) + x_2(x_2 - 11) - 6x_3 + u \end{cases}$$

$$y = f(x_1, x_2, x_3, u) = x_2(1 + x_3) - x_3 + 2u$$

si costruisce la Matrice Jacobiana del sistema:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1^2 - 5x_3 + u & 1 & -5x_1 \\ -8x_1x_2 & -4x_1^2 + 2x_2 & 1 + u \\ x_3 - 6 & 2x_2 - 11 & -6 \end{pmatrix}$$

La matrice Jacobiana calcolata nell'origine, con ingresso nullo, vale:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}$$



$$b = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right] = [0, 1, -1]$$

$$d = \frac{\partial f}{\partial u} = 2$$

Il sistema linearizzato risulta essere in forma Compagna di Controllo.

- Il polinomio Caratteristico della matrice  $A$  (che risulta in forma Compagna Orizzontale Inferiore) è:

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$$

si osserva immediatamente che  $\lambda_1 = -1$  è uno zero del polinomio; effettuando la divisione del detto polinomio per  $\lambda + 1$ , si fattorizza nel seguente modo:

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 5\lambda + 6)$$

Gli altri zeri del polinomio sono gli zeri di  $\lambda^2 + 5\lambda + 6$ ; ovvero:

$$\lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = -3$$

Gli Autovalori della Matrice  $A$  sono, quindi, tutti a parte reale Strettamente Negativa, si conclude che l'equilibrio  $[0, 0, 0]$  è Asintoticamente Stabile.

## 2. Polinomio

Si costruisce la Tabella di Hurwitz:

	1	2	3	4
6	1	1	2	2
5	1	1	1	0
4	0	1	2	
3				
2				
1				
0				

La riga 4 contiene uno zero nella colonna Pivot, ma la stessa

riga non è tutta nulla. Si sostituisce lo 0 con un valore infinitesimo  $\epsilon$ .

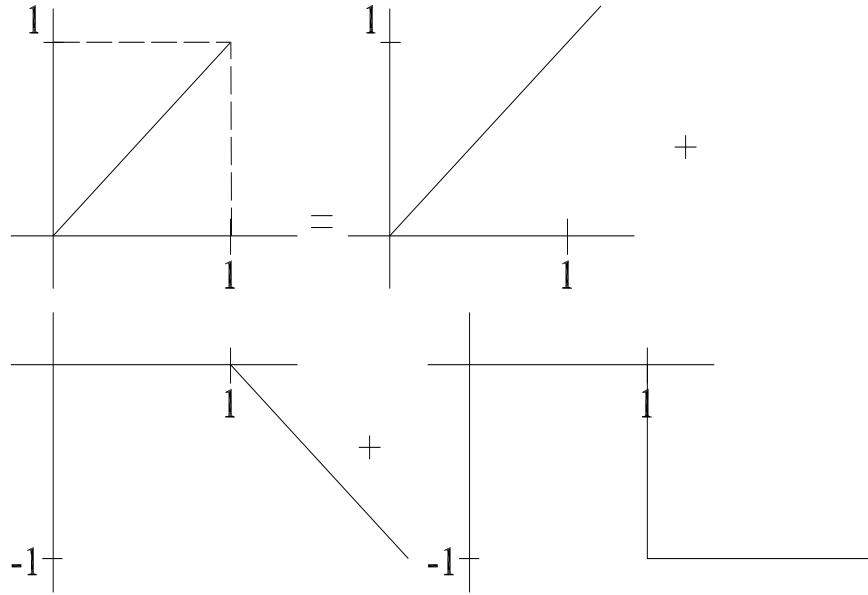
	1	2	3	4
6	1	1	2	2
5	1	1	1	0
4	$\epsilon$	1	2	
3	$\frac{\epsilon-1}{\epsilon}$	$\frac{\epsilon-2}{\epsilon}$	0	
2	1	2		
1	-1	0		
0	-2	0		

Nella Colonna Pivot, Riga 2, ci sarebbe  $\frac{\epsilon^2-3\epsilon+1}{1-\epsilon} \simeq 1$ , in quanto  $\epsilon \ll 1$ .

Osservando la Colonna Pivot, si conclude che, essendoci 3 Permanenze di segno e 3 Variazioni, il polinomio ha 3 zeri a parte reale strettamente Negativa, e 3 a parte reale strettamente Positiva. Si può concludere dicendo che, se il polinomio dato è caratteristico della Matrice Dinamica di un Sistema Lineare, il sistema stesso è Instabile, per la presenza di Autovalori a parte Reale Strettamente Positiva.

## 3. Segnale Periodico.

- Si considera il segnale in un periodo; esso può essere scomposto nella seguente maniera:



Considerando che si ha a che fare con due Rampe unitarie, al più traslate, ed un gradino unitario, anch'esso traslato, si calcola immediatamente la  $\mathcal{L}$  trasformata del segnale NEL PERIODO:

$$G_T(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-s}$$

Il segnale complessivo è periodico di periodo  $T = 1$ ; la sua  $\mathcal{L}$  trasformata è data da:

$$G(s) = \frac{G_T(s)}{1 - e^{-Ts}} = \frac{1 - e^{-s} - se^{-s}}{s^2(1 - e^{-s})}$$

- Le Singolarità Polari di tale segnale, devono giacere sull'asse immaginario, in quanto si tratta di segnale periodico; per trovare tali Singolarità Polari, si risolve l'equazione:

$$s^2(1 - e^{-s}) = 0$$

ricordando che  $s$  deve essere del tipo  $s = j\omega$   $\omega \in \mathbb{R}$ :

$$s^2 = 0 \Leftrightarrow s = 0$$

$$1 - e^{-s} = 0 \Leftrightarrow e^{-s} = 1 \Rightarrow e^{-j\omega} = 1 \Rightarrow \cos(-\omega) + j \sin(-\omega) = 1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \cos(-\omega) = \cos(\omega) & = 1 \\ \sin(-\omega) = -\sin(\omega) & = 0 \end{cases}$$

Ovvero:

$$\omega = 2K\pi \quad K \in \mathbb{Z}$$

Le Singolarità Polari, sono:

$$s = j2K\pi \quad K \in \mathbb{Z}$$

## 4. Funzione di Trasferimento

- L'unico polo della F.d.T. è a parte reale Negativa; il sistema a cui è associata tale F.d.T. è Asintoticamente Stabile, quindi ha senso parlare di Risposta di Regime (considerando anche che l'ingresso,  $u(t) = e^{-t}$ , è una funzione  $\mathcal{L}$  trasformabile).

Essendo l'ingresso  $u(t) = e^{-t}$ , si pone  $\hat{s} = -1$ ; la risposta di regime, è data da:

$$y_r(t) = G(\hat{s})e^{\hat{s}t} = 0 \quad \text{essendo } G(\hat{s}) = G(-1) = 0$$

- La risposta di regime, al segnale  $u(t) = 3 \sin(10t - \frac{\pi}{4})$ , è data da:

$$3|G(j\omega)| \sin\left(10t - \frac{\pi}{4} + \arg[G(j\omega)]\right)$$

dove  $G(j\omega) = \frac{1}{2} + j5$  (I° Quadrante), quindi:

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\frac{1}{4} + 25}$$

$$\arg[G(j\omega)] = \arctan(10)$$

Testo eseguito con: L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>