

## **- Sistemi di Controllo & Specifiche -**

*(Praticò Andrea)*

7 giugno 2002

# Indice

<b>1</b>	<b>Controllore o Regolatore</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Sistemi in Reazione</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Specifiche</b>	<b>8</b>
3.1	Specifiche Statiche . . . . .	8
3.1.1	Considerazioni sull'errore a regime . . . . .	9
3.1.2	Definizione di Banda Passante . . . . .	11
3.2	Specifiche Dinamiche . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Riduzione dell'Ordine dei Modelli</b>	<b>16</b>
<b>5</b>	<b>Calcolo dell'Overshoot per Sistemi del II° Ordine</b>	<b>18</b>
<b>6</b>	<b>Diagrammi di Hall &amp; Nichols</b>	<b>20</b>
6.1	Diagrammi di Hall . . . . .	20
6.2	Diagrammi di Nichols . . . . .	23

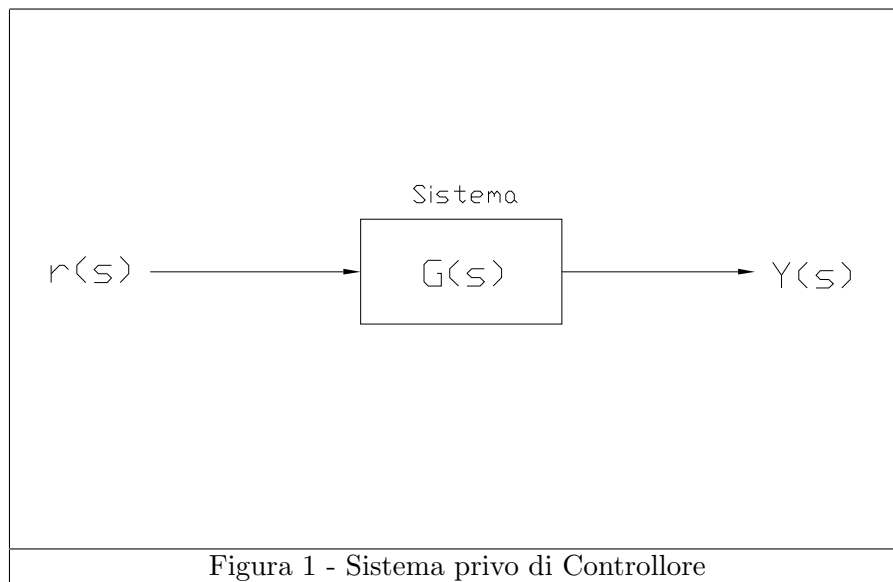
# Capitolo 1

## Controllore o Regolatore

Per comprendere meglio la necessità dell'utilizzo e progettazione dei controllori, si ritiene opportuno esplicitare il seguente esempio:

il nostro scopo sia quello di voler automatizzare la guida di un veicolo, per esempio un'automobile, attraverso un determinato percorso di cui si conosca perfettamente la conformazione, le curve, la velocità con cui affrontarle ecc.

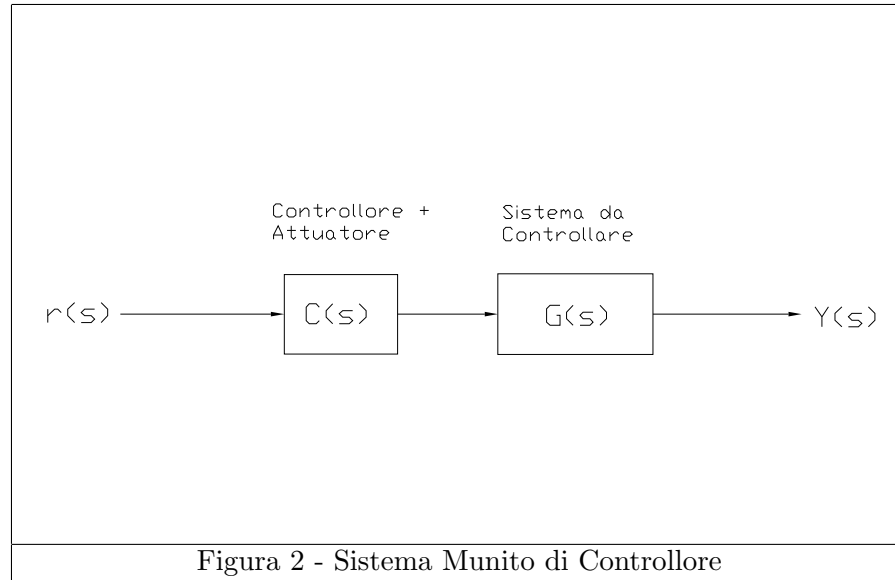
Possiamo affermare che il veicolo in oggetto sia caratterizzato da una propria Funzione di Trasferimento (così come lo sono tutti i sistemi fisici)  $G(s)$ . Una volta strutturata la sequenza di comandi da inviare al nostro sistema (l'automobile), la cosa più semplice da fare è inviarla in ingresso  $r(s)$  al nostro sistema.



Se il sistema è PERFETTAMENTE STRUTTURATO questa soluzione è ancora accettabile, ma cosa succede se il sistema è fortemente influenzato da elementi esterni? (Pedoni che attraversano la strada, semafori rossi, macchine in doppia fila!).

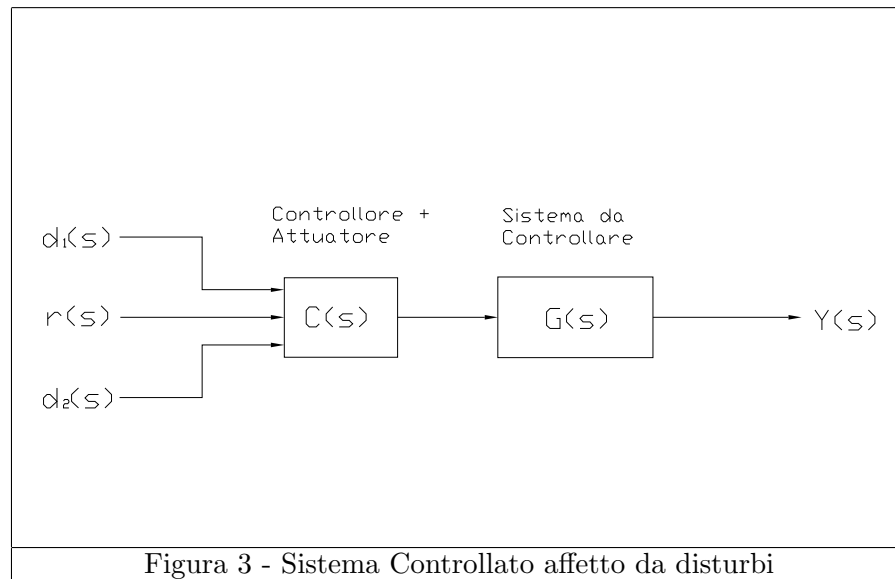
È evidente che l'uscita  $Y(s)$  continuerebbe ad essere la solita, mentre la struttura del percorso sarebbe differente; è facile immaginare, a questo punto, il risultato del nostro progetto!

È abbastanza ovvio che si necessita di un apparato in grado di prendere delle decisioni in virtù delle situazioni in cui si trova il nostro sistema; nasce quindi la necessità di introdurre "il Controllore" (o Regolatore) del sistema. Il sistema più semplice che si possa concepire è quello cosiddetto in catena diretta, rappresentato nella seguente Figura:



Nel caso dell'automobile, il 'Controllore' per eccellenza è il cervello umano, che reagendo, tramite i sensi, è in grado di adattare il segnale di controllo del veicolo, con la conformazione del percorso.

Al di là dell'esempio appena proposto, lo scopo fondamentale dell'inserzione del Controllore è quello di garantire che l'uscita  $Y(s)$  sia il più possibile simile al segnale d'ingresso  $r(s)$  (Riferimento o Set Point) nonostante l'eventuale presenza di segnali estranei, denominati Disturbi:



A questo punto sembrerebbe conclusa la questione, ed il nostro sistema pronto per essere utilizzato. Esiste, tuttavia, una problematica che riveste un ruolo molto importante nella progettazione di Sistemi Automatici; tale problema è legato alla metodologia con la quale è stato modellato il nostro sistema da controllare  $G(s)$ ; ovvero qualunque sistema fisico esistente può essere modellato mediante una opportuna F.d.T., ma questa sarà inevitabilmente soggetta a delle approssimazioni o errori derivanti da misure dirette. Il segnale d'uscita  $Y(s)$  non rispecchierà alla perfezione l'ingresso  $r(s)$ , ma sarà affetto da errori.

Il compito fondamentale, quindi, del Controllore non è più quello di garantire che  $Y(s) = r(s)$ , ma quello di rendere il più possibile 'vicini' i due segnali, ovvero di assottigliare

l'Errore che viene inevitabilmente commesso:

$$\varepsilon(s) = Y(s) - r(s)$$

Per poter fare tale operazione, è necessario confrontare l'ingresso  $r(s)$  con l'uscita  $Y(s)$ , ed, istante per istante, avere informazioni sulla quantità denominata errore  $\varepsilon(s)$ .

Ciò viene perfettamente operato dai...

## Capitolo 2

# Sistemi in Reazione

Lo scopo principale nella progettazione di sistemi di controllo chiusi in reazione consiste nella scelta di una funzione di trasferimento del controllore, tale che il prodotto di quest'ultima con la funzione di trasferimento del sistema da controllare, sia pari ad una funzione di trasferimento complessiva (ad anello chiuso) che soddisfi delle Specifiche di progetto prefissate.

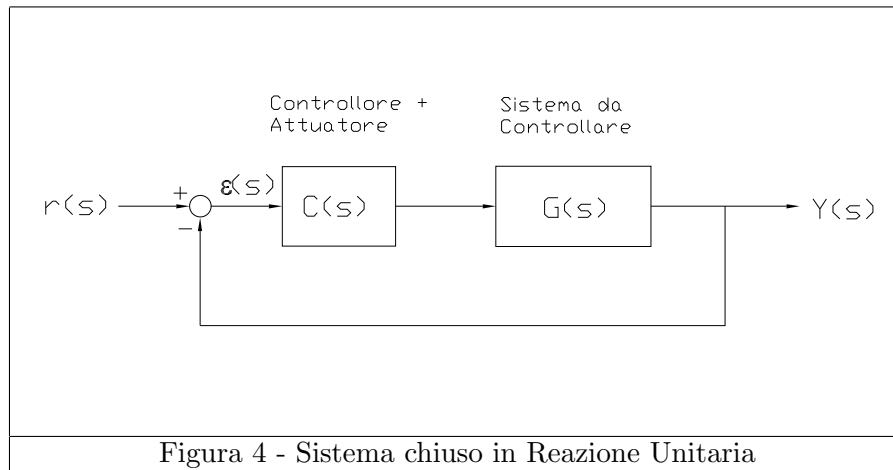


Figura 4 - Sistema chiuso in Reazione Unitaria

Con riferimento allo schema, si hanno le seguenti relazioni:

$$Y(s) = \varepsilon(s) \cdot C(s) \cdot G(s)$$

$$\varepsilon(s) = r(s) - Y(s) \quad (\text{Errore})$$

$$r(s) = \text{Riferimento o Set Point}$$

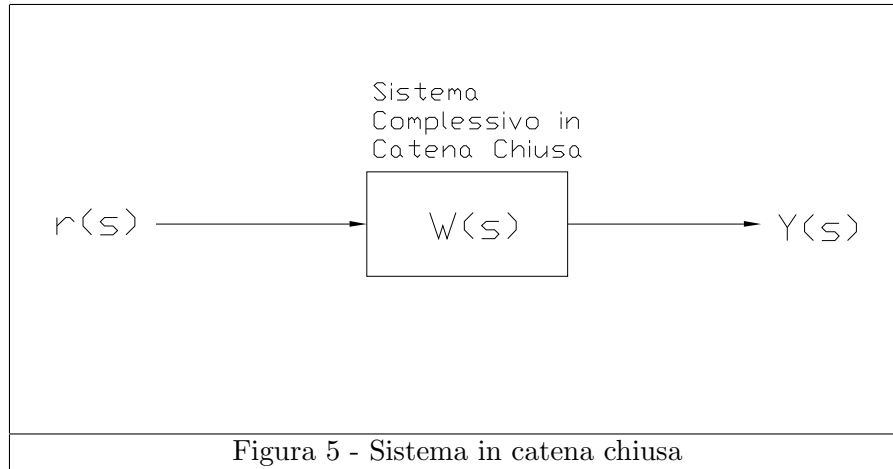
L'anello di reazione è costituito da un trasduttore (posto all'uscita del sistema) che converte il segnale d'uscita in una grandezza "coerente" con il riferimento (Set Point), e da un circuito di chiusura che somma algebricamente tale uscita al riferimento. Il trasduttore in realtà possiede anch'esso una propria F.d.T. (sia  $H(s)$ ). La condizione imposta affinché tale trasduttore sia valido, è che la sua Banda Passante <sup>1</sup> (di  $H(s)$ ) sia maggiore di quella propria del sistema (di  $G(s)$ ) da controllare;

$$BP_H \text{ maggiore di almeno due decadi rispetto a } BP_G$$

Dalle precedenti relazioni, si ottiene la funzione di trasferimento del sistema in Catena Chiusa:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{r(s)} = \frac{C(s) \cdot G(s)}{1 + C(s) \cdot G(s)}$$

<sup>1</sup>Vedi pag. 11



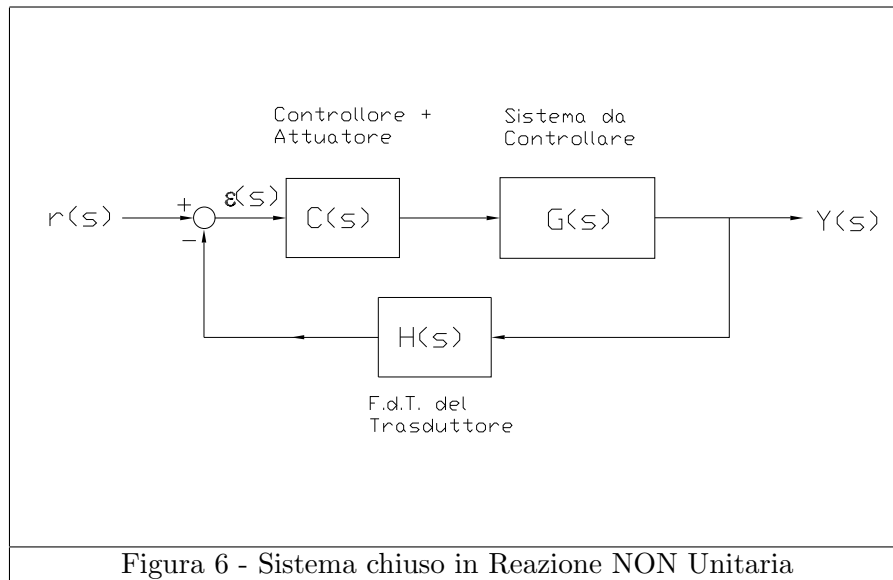
Si danno le seguenti terminologie:

$W(s)$  F.d.T. in catena Chiusa

$C(s) \cdot G(s)$  F.d.T. in catena Diretta

$\frac{\varepsilon(s)}{r(s)} = \frac{1}{1 + C(s) \cdot G(s)}$  F.d.T. della dinamica dell'errore

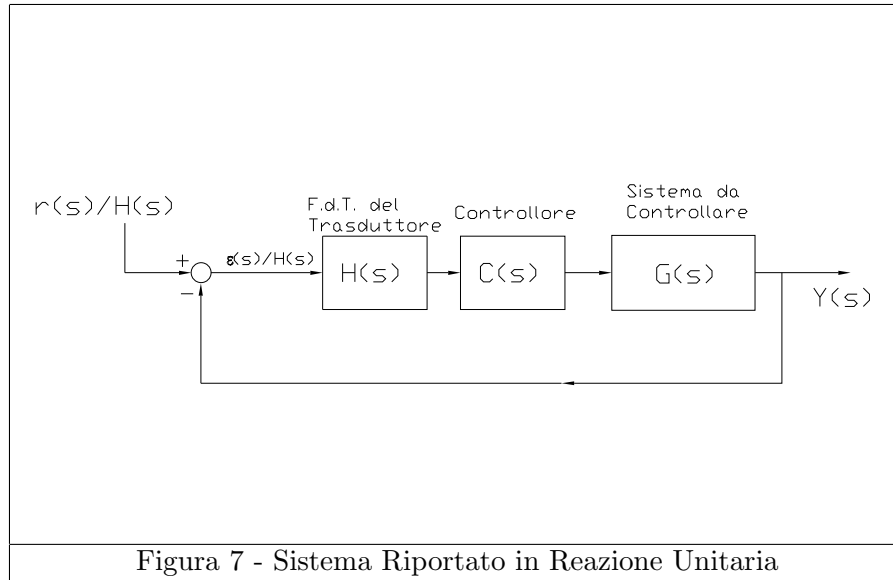
Se anche il trasduttore presentasse una propria F.d.T.  $H(s)$ , allora il sistema si direbbe “chiuso in reazione NON unitaria”



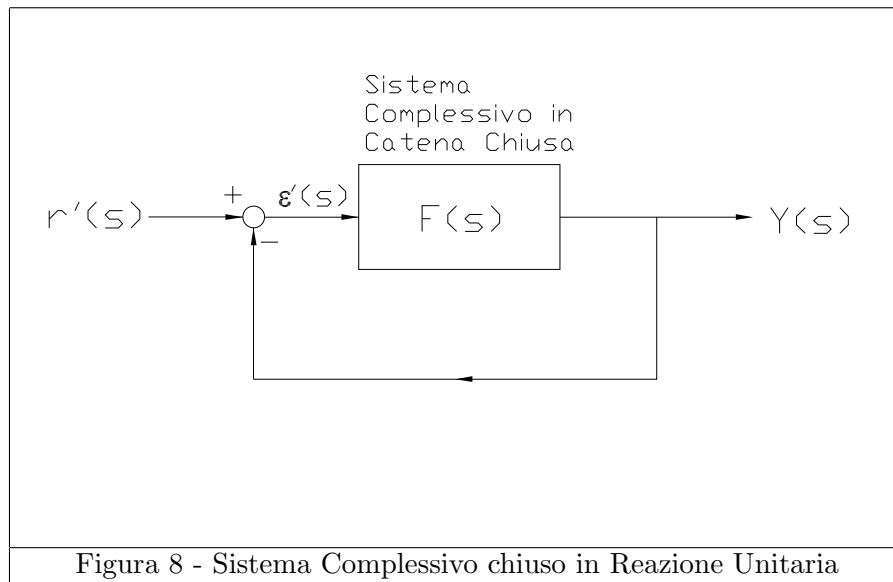
nel qual caso la F.d.T. complessiva in catena chiusa sarebbe:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{r(s)} = \frac{C(s) \cdot G(s)}{1 + H(s) \cdot C(s) \cdot G(s)}$$

dove la quantità  $H(s) \cdot C(s) \cdot G(s)$  prende il nome di F.d.T. in Catena Aperta. Un sistema di tal genere può, comunque, essere sempre ridotto ad uno equivalente chiuso in reazione unitaria:



Basta dare in ingresso, non più  $r(s)$ , ma l'ingresso Normalizzato  $r'(s) = \frac{r(s)}{H(s)}$ . In generale il sistema complessivo può essere visto come il seguente:



dove  $\varepsilon'(s) = \frac{\varepsilon(s)}{H(s)}$  ed  $F(s) = H(s) \cdot C(s) \cdot G(s)$ .



# Capitolo 3

## Specifiche

Le specifiche per la progettazione di un controllore si dividono nelle seguenti categorie:

1. Specifica Sottintesa: il sistema in catena chiusa deve essere Asintoticamente Stabile
2. Specifiche Statiche
3. Specifiche Dinamiche

### 3.1 Specifiche Statiche

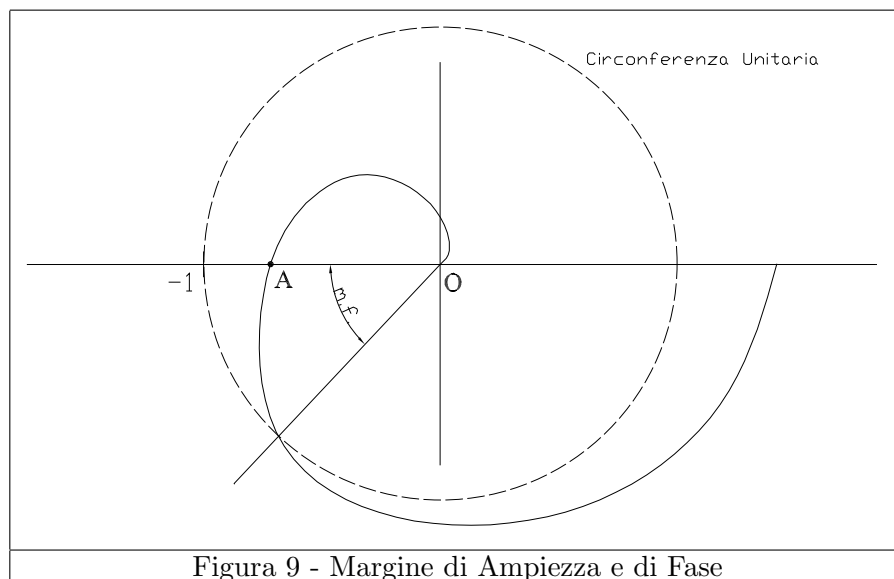
Le specifiche Statiche riguardano il comportamento del sistema per  $t \rightarrow +\infty$ , ovvero il comportamento a Regime; vi sono tre specifiche di questa categoria:

- Errore a Regime  $\varepsilon_\infty$  (se non viene specificato, si intende l'errore quando l'ingresso è il Gradino Unitario). Per esempio, dire che l'errore a regime deve essere inferiore ad un  $a\%$  significa porre la condizione:

$$\varepsilon_\infty = \frac{y_\infty - r}{r} < \frac{a}{100}$$

dove  $y_\infty$  è l'uscita di regime (che ricordiamo esistere, in quanto il sistema in catena chiusa è Asintoticamente Stabile, vedi Specifica 1).

- Indici di Robustezza, sono il Margine di Ampiezza (*m.a.*) ed il Margine di Fase (*m.f.*). Per capire il loro significato, bisogna rifarsi ai diagrammi di Nyquist. Prendiamo il seguente:



E' risaputo che, quando vi è un incremento del guadagno di Bode, il diagramma di Nyquist corrispondente al sistema, si espande pur mantenendo la solita conformazione. Ciò può portare da una situazione di Asintotica stabilità ad una di Instabilità (quando il diagramma si espande a tal punto da presentare dei circondamenti del punto di instabilità  $(-1, 0)$ ). I parametri che tengono conto della più o meno "vicinanza" all'instabilità sono il Margine di Ampiezza, definito come

$$m.a. = \frac{1}{\overline{OA}}$$

dove  $\overline{OA}$  è la lunghezza del segmento di estremi l'origine, ed il punto di intersezione del diagramma di Nyquist con l'asse reale negativo; ed il Margine di Fase definito nella seguente maniera: si traccia la circonferenza Unitaria di centro l'origine, si unisce con una semiretta l'origine con il punto di intersezione del diagramma con tale circonferenza, l'angolo che tale semiretta forma con l'asse reale negativo è il Margine di Fase ( $m.f.$ ).

Valori comuni di  $m.a.$  e  $m.f.$  sono:

$$m.a. \geq 6 \text{ dB, ovvero } m.a. \geq 2 \Rightarrow \overline{OA} \leq 0.5$$

$$m.f. \geq 45^\circ \text{ in genere m.f. non deve essere inferiore a } 45^\circ$$

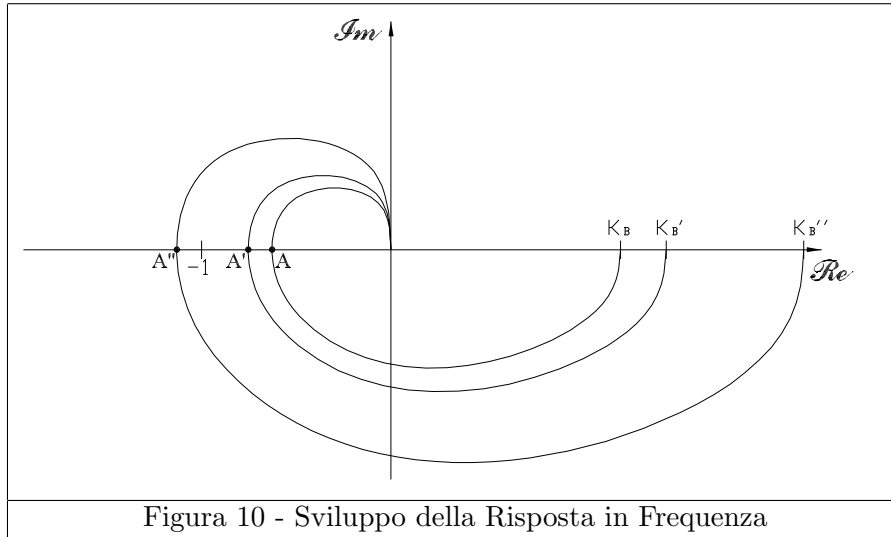


Figura 10 - Sviluppo della Risposta in Frequenza

### 3.1.1 Considerazioni sull'errore a regime

Vediamo cosa vuol dire limitare l'errore a regime quando l'ingresso è il Gradino Unitario:

$$\varepsilon_\infty \leq a\%$$

Consideriamo la Dinamica dell'Errore  $E(s) = \frac{\varepsilon(s)}{r(s)} = \frac{1}{1+C(s)G(s)}$ . L'ingresso è il Gradino unitario, quindi:

$$\varepsilon(s) = \frac{r(s)}{1+C(s)G(s)} \Rightarrow \varepsilon(s) = \frac{1/s}{1+C(s)G(s)}$$

Per il teorema del valore finale <sup>1</sup>, si ha:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \varepsilon(s)$$

<sup>1</sup>Se esistono finiti i due limiti, allora:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

Il teorema del valore finale è applicabile in quanto il  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t)$  esiste finito, data l'Asintotica Stabilità del sistema.

$$\varepsilon_{\infty} = \frac{1}{1 + C(0)G(0)}$$

ATTENZIONE questa espressione ha senso solo se il sistema è di tipo 0 ovvero non ha poli nell'origine, infatti non avrebbe senso  $G(0)$  se ci fosse un polo nell'origine.

La condizione  $\varepsilon_{\infty} \leq a\%$  corrisponde alla condizione

$$\frac{1}{1 + C(0)G(0)} \leq a\% \quad \text{Solo per sistemi di tipo 0}$$

Se il sistema fosse di tipo 1 (un polo semplice nell'origine), si pone:

$$G_1(s) = s \cdot G(s) \Rightarrow G(s) = \frac{G_1(s)}{s}$$

Si ottiene:

$$\varepsilon(s) = \frac{r(s)}{1 + C(s)\frac{G_1(s)}{s}} = \frac{s \cdot r(s)}{s + C(s)G_1(s)} = \frac{1}{s + C(s)G_1(s)} \quad \left(r(s) = \frac{1}{s}\right)$$

$$\varepsilon_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s + C(s)G_1(s)} = \frac{0}{0 + C(0)G_1(0)} = 0$$

Il termine  $G_1(0)$  prende il nome di GUADAGNO DI VELOCITÀ'.

Si conclude che l'errore di regime ad ingresso a gradino unitario per sistemi di tipo 1, è nullo!

Con ragionamenti analoghi si può determinare l'errore di regime per sistemi di tipo 2,3 ecc. soggetti ad ingressi diversi (gradino, rampa, parabola ecc.); considerando il sistema in catena diretta, e la sua dinamica dell'errore, si ottiene la seguente tabella:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} \quad [\text{qui } G(s) \text{ fa le veci di } H(s) \cdot C(s) \cdot G(s)]$$

tipo $\rightarrow$ ingresso $\downarrow$	0	1	2	3	...	n
$\delta(t)$	0	0	0	0	...	0
$H(t)$	$\frac{1}{1+G(0)}$	0	0	0	...	0
$t \cdot H(t)$	$\infty$	$\frac{1}{G_1(0)}$	0	0	...	0
$t^2 H(t)$	$\infty$	$\infty$	$\frac{2}{G_2(0)}$	0	...	0
$t^3 H(t)$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\frac{6}{G_3(0)}$	...	0
...	...	...	...	...	...	...
$t^n H(t)$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	...	$\frac{n!}{G_n(0)}$

Termini Importanti:

$G(0)$  = Guadagno Statico o di Bode

$G_1(0)$  = Guadagno di Velocità

$G_2(0)$  = Guadagno di Accelerazione

### Come si Utilizza la Tabella

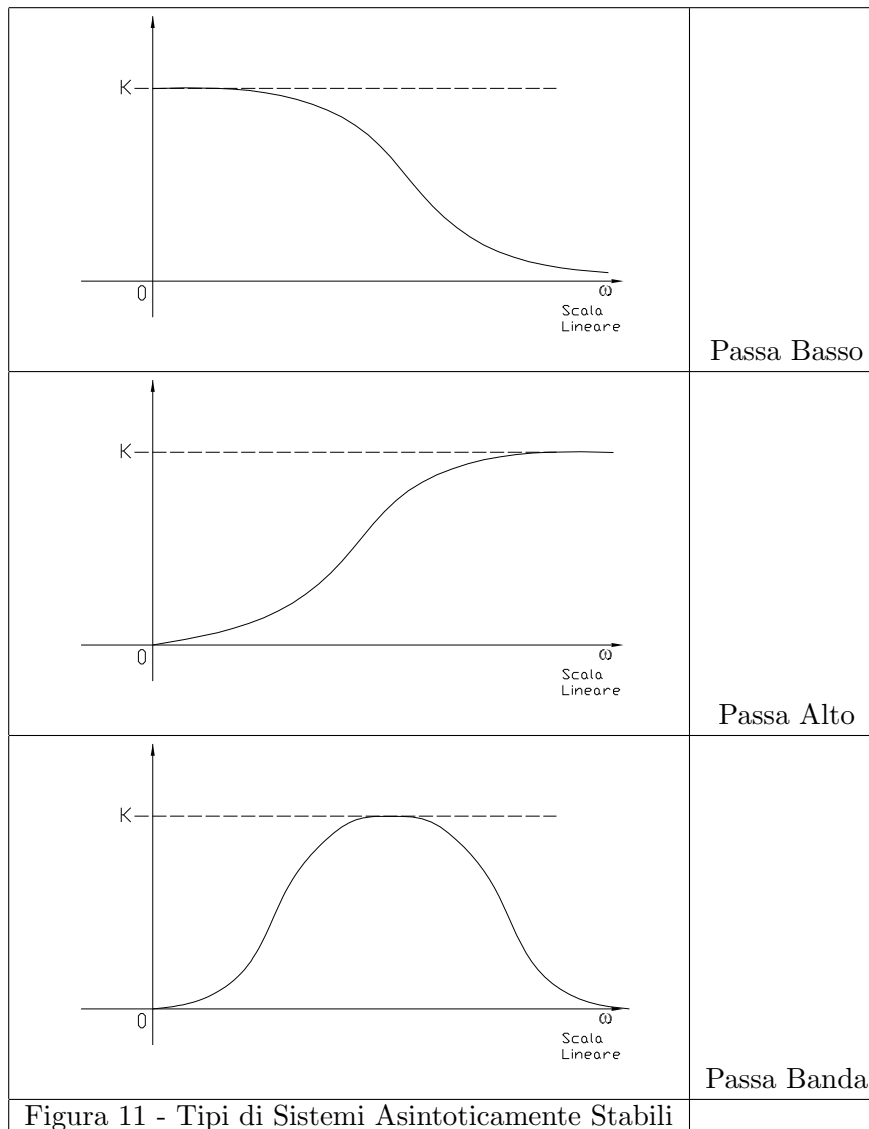
- Supponiamo di voler progettare un controllore tale che l'errore di regime con ingresso a gradino unitario sia nullo; si osserva che per soddisfare tale specifica è necessario che il sistema in catena diretta sia almeno di tipo 1.
- Supponiamo di voler progettare un controllore tale che l'errore di regime con ingresso a rampa unitaria sia inferiore al 3%; allora si deve imporre la condizione  $\frac{1}{G_1(0)} < \frac{3}{100}$ , e calcolare così il guadagno di velocità adeguato a tale specifica.

### 3.1.2 Definizione di Banda Passante

I sistemi Asintoticamente stabili (e solo essi), possono essere classificati in tre tipi:

1. Sistema PASSA BASSO
2. Sistema PASSA ALTO
3. Sistema PASSA BANDA

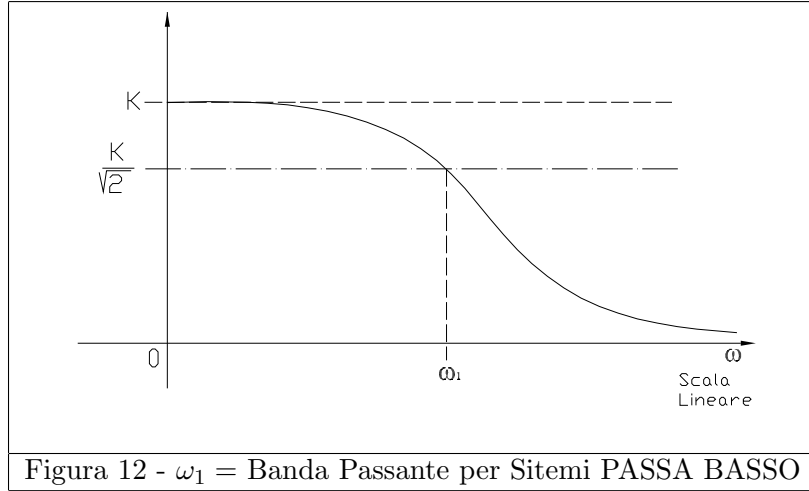
L'andamento dei diagrammi di Ampiezza è caratteristico di ciascun sistema, :



Per ogni tipo di sistema esiste una diversa (ma analoga) definizione di Banda Passante

## 1. Sistema PASSA BASSO

La Banda Passante per i sistemi Passa-Basso è il valore della frequenza a cui corrisponde un valore dell'ampiezza pari a  $\frac{K}{\sqrt{2}}$ , dove  $K$  è l'ampiezza a frequenza nulla  $\omega = 0$ . Se l'ampiezza fosse espressa in dB, allora la B.P. sarebbe pari alla frequenza a cui corrisponde il valore  $K_{dB} - 3$  [dB].

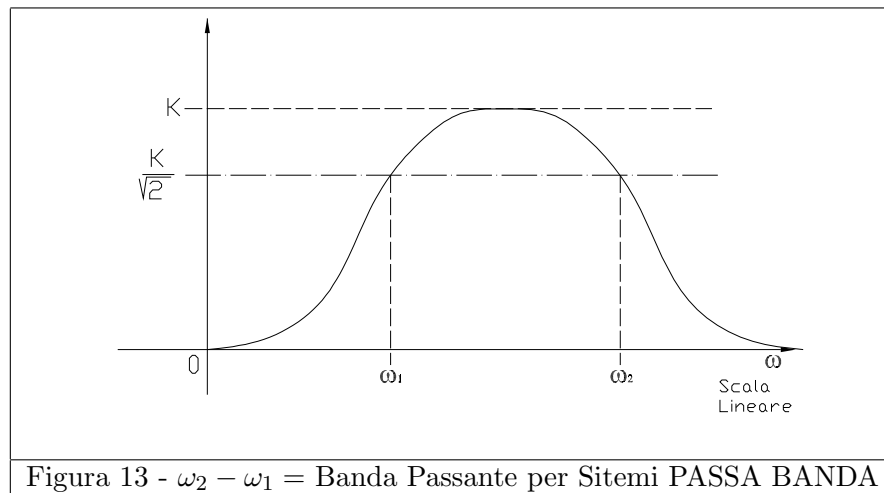


## 2. Sistema PASSA ALTO

Per i sistemi Passa Alto la banda passante è teoricamente infinita. Nella realtà fisica non esistono sistemi Passa Alto.

## 3. Sistema PASSA BANDA

La Banda Passante per i sistemi Passa-Banda è il valore della differenza fra la prima e la seconda frequenza a cui corrisponde un valore dell'ampiezza pari a  $\frac{K}{\sqrt{2}}$ , dove  $K$  è l'ampiezza massima. Se l'ampiezza fosse espressa in dB, allora la B.P. sarebbe pari alla differenza di frequenze a cui corrisponde il valore  $K_{dB} - 3$  [dB].



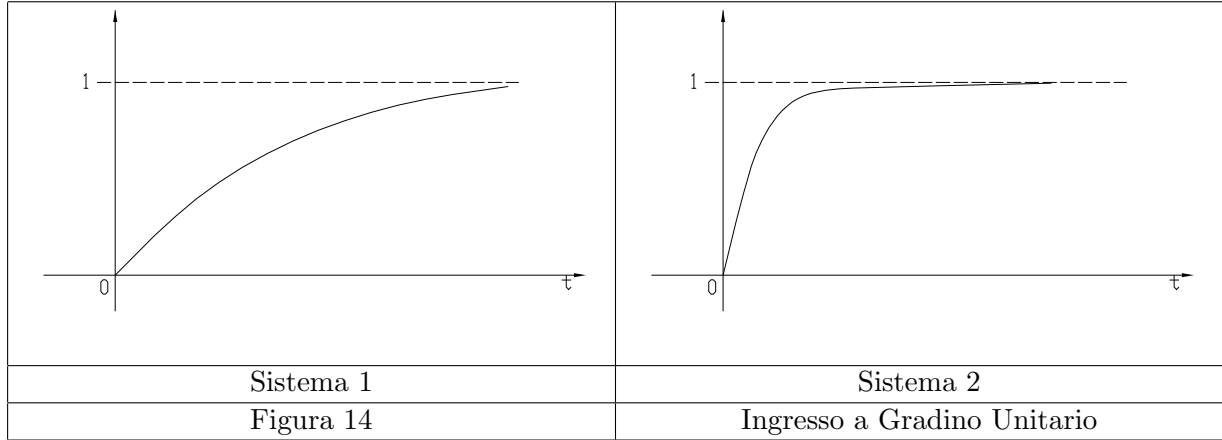
Questo tipo di Banda Passante, è denominata Banda Passante a 3 dB poichè:

$$20 \log \left( \frac{K}{\sqrt{2}} \right) = 20 \log(K) - 20 \log(\sqrt{2}) = K_{dB} - 3 \quad [\text{dB}]$$

Esiste anche un altro tipo di Banda Passante, definita a 6 dB; essa è tale per cui:

$$20 \log(K) - 20 \log(2) = 20 \log \left( \frac{K}{2} \right)$$

ovvero il valore di riferimento per le frequenze, è pari alla metà del valore di picco dell'ampiezza. La Banda Passante è indicativa della Prontezza di un sistema; ovvero più ampia è la banda passante è più pronto è il sistema. Un sistema si dice più 'pronto' di un altro se la sua risposta si adegua (ovvero segue) più rapidamente all'ingresso dato.



Il Sistema 2 è più *pronto* del Sistema 1.

## 3.2 Specifiche Dinamiche

Le Specifiche Statiche, fin qui esposte, fissano delle limitazioni al comportamento del sistema in condizioni di regime, ovvero per tempi sufficientemente lunghi; esse non fissano delle limitazioni nei primi istanti della dinamica del sistema. Per questo si fa ricorso alle Specifiche Dinamiche che sono sempre definite per ingresso a gradino unitario.

Le Specifiche Dinamiche possono essere fornite in due modi diversi, ma corrispondenti:

- Specifiche nel Dominio del Tempo:

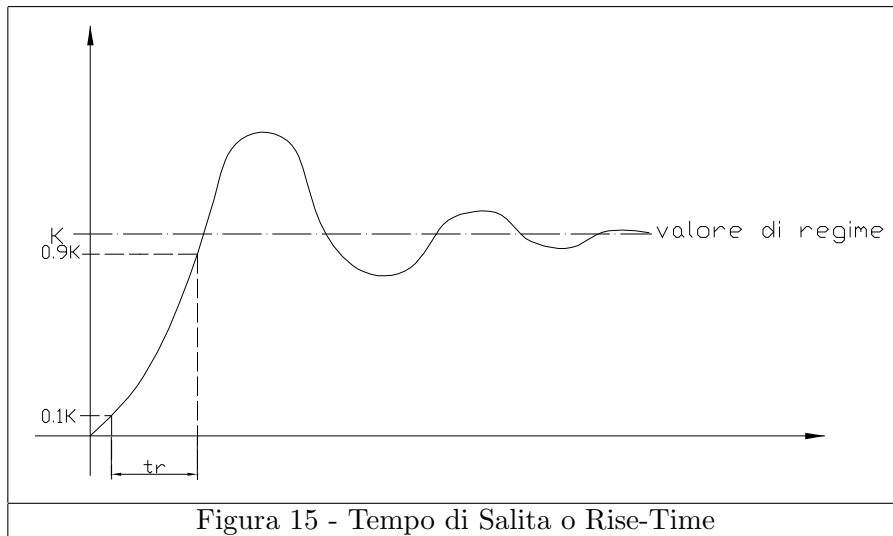
$$\left\{ \begin{array}{ll} t_r &= \text{Tempo di Salita o Rise-Time} \\ ov &= \text{Overshoot o Sovraelongazione} \\ t_s &= \text{Tempo di Assestamento} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} BP_{(3dB)} &= \text{Banda Passante a 3 dB} \\ P_r &= \text{Picco di Risonanza} \\ f_r &= \text{Frequenza di Risonanza} \end{array} \right.$$

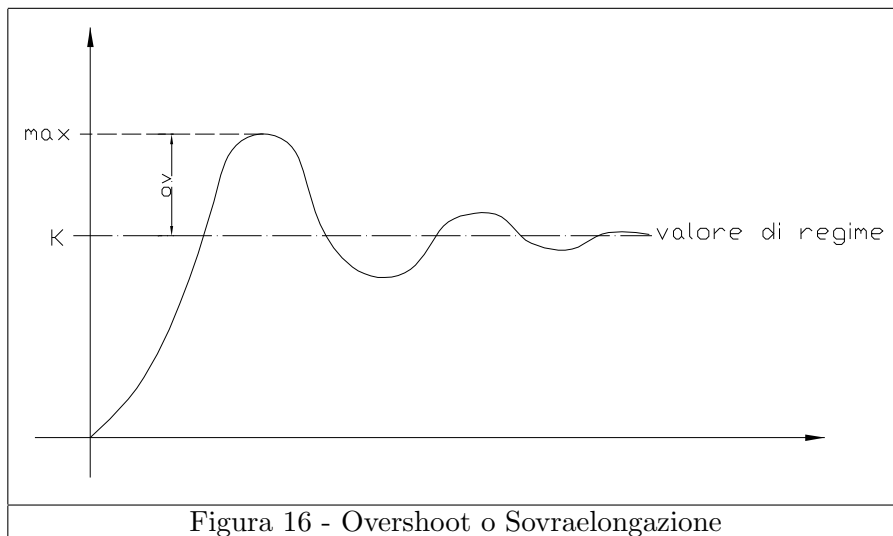
Vediamo il significato di tali Specifiche, per sistemi del second'ordine <sup>2</sup>:

### 1. DOMINIO del TEMPO

- Tempo di Salita ( $t_r$ ): è l'intervallo di tempo che intercorre fra l'attimo in cui il segnale acquista il valore pari al 10% del valore di regime, e l'attimo in cui ne acquista il 90%

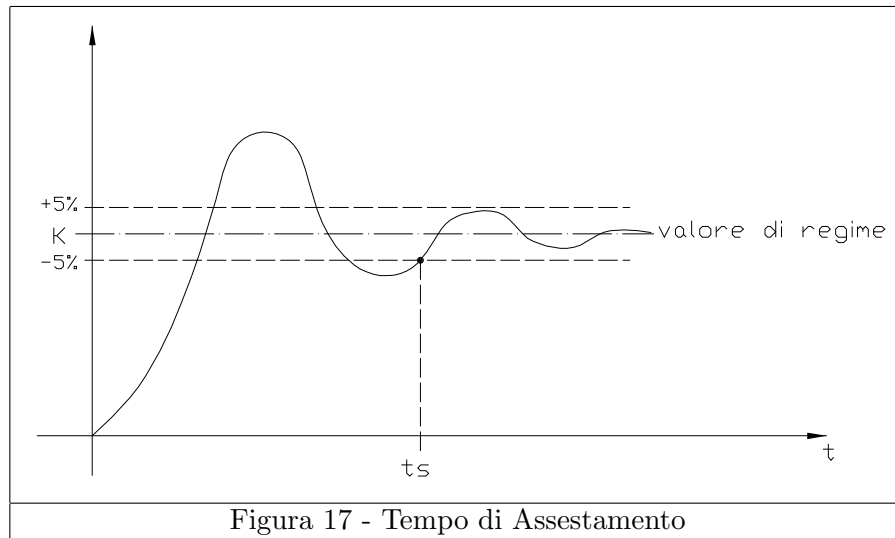


- Overshoot ( $ov$ ): è la differenza tra il valor massimo raggiunto dal segnale ed il valore di regime. Esso viene anche espresso in percentuale:  $ov\% = \frac{ov}{K} \cdot 100$ .



- Tempo di Assestamento (di solito al 5%): è il tempo necessario al segnale per rientrare in una fascia di tolleranza, che differisca meno del 5% dal valore di regime, e non fuoriuscirne più.

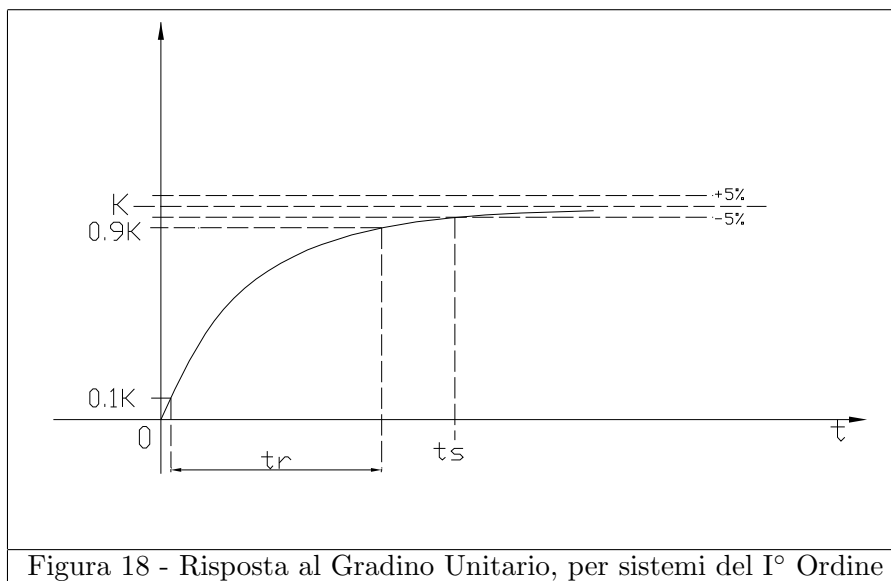
<sup>2</sup>Quei sistemi il cui polinomio caratteristico è di secondo grado



## 2. DOMINIO della FREQUENZA

- Banda Passante
- Picco di Risonanza
- Frequenza di Risonanza

Le precedenti Specifiche sono state definite con riferimento a sistemi del II° ordine; per sistemi del I° ordine il significato è analogo, tranne che per la Sovraelongazione e per il corrispondente Picco di Risonanza. Infatti, l'andamento della risposta al gradino unitario, per un sistema del I° ordine, è il seguente:



come si può notare, una risposta di tal genere non presenta Sovraelongazione.



## Capitolo 4

# Riduzione dell'Ordine dei Modelli

Dato un sistema chiuso in reazione con la sua F.d.T. in catena chiusa di grado  $n$  ( $W(s)$ ), ci si chiede se esiste un modello più semplice (di grado inferiore) che approssimi in maniera “accettabile” la  $W(s)$ .

Il modello che meglio approssima la  $W(s)$  è quella F.d.T.  $G(s)$  che si ottiene dalla  $W(s)$  trascurando i poli meno dominanti, ovvero considerando soltanto i modi dominanti del sistema. Si possono avere i seguenti tre casi:

1. Il polo dominante è Reale negativo; in questo caso:

$$G(s) = \frac{K_B}{1 + \frac{s}{p}} \quad \text{dove } K_B \text{ è il guadagno di Bode della } W(s)$$

2. I poli dominanti sono Complessi Coniugati. In questo caso:

$$G(s) = \frac{K_B}{1 + \frac{2\xi}{\omega} \cdot s + \frac{s^2}{\omega^2}} \quad (K_B \text{ solito significato})$$

3. (Caso Eccezionale) Si hanno tre poli dominanti, uno reale e due complessi coniugati tali che la parte reale di questi ultimi sia uguale al polo reale. In questo caso la  $G(s)$  è di III° grado:

$$G(s) = \frac{K_B}{(1 + \frac{s}{p})(1 + \frac{2\xi}{\omega} \cdot s + \frac{s^2}{\omega^2})} \quad (K_B \text{ solito significato})$$

Si conclude che, salvo il caso eccezionale (3), un qualsiasi sistema è riducibile ad uno di I° o, al massimo, di II° grado. Ciò giustifica il fatto che le specifiche dinamiche siano state definite solo per sistemi di tali gradi.

Si conclude la trattazione, riportando un esempio concreto.

Sia data la seguente F.d.T. di un sistema in catena chiusa:

$$W(s) = \frac{4(s+2)(s+5)}{(s+1)(s+10)^2(s^2+5s+10)}$$

si calcola il guadagno di Bode (o guadagno Statico):  $K_B = \frac{4 \cdot 2 \cdot 5}{1 \cdot 100 \cdot 10} = \frac{4}{100}$ .

Il Polo dominante è  $-1$ , quindi

$$G(s) = \frac{K_B}{s+1} = \frac{4/100}{s+1}$$

Valutiamo la risposta al Gradino Unitario relativa alle due F.d.T. così da poter effettuare il confronto:

$$\frac{1}{s} \cdot W(s) = \frac{A_{12}}{(s+10)^2} + \frac{A_{11}}{s+10} + \frac{A_2}{s} + \frac{A_3}{s+1} + \frac{A_4}{s + \frac{5}{2} + j\frac{\sqrt{15}}{2}} + \frac{A_4^*}{s + \frac{5}{2} - j\frac{\sqrt{15}}{2}}$$

$$\begin{aligned}
A_{12} &= \frac{4(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s^2+5s+10)} \Big|_{s=-10} = \frac{4}{135} \\
A_2 &= \frac{4(s+2)(s+5)}{(s+1)(s^2+5s+10)(s+10)^2} \Big|_{s=0} = \frac{4}{100} \\
A_3 &= \frac{4(s+2)(s+5)}{s(s+10)^2(s^2+5s+10)} \Big|_{s=-1} = -\frac{8}{243} \\
A_4 &= \frac{4(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+\frac{5}{2}-j\frac{\sqrt{15}}{2})} \Big|_{s=-\frac{5}{2}-j\frac{\sqrt{15}}{2}} = -\frac{1}{180} - j\frac{\sqrt{15}}{300} \\
A_4^* &= -\frac{1}{180} + j\frac{\sqrt{15}}{300}
\end{aligned}$$

Dal teorema dei residui polari:

$$A_{11} + A_2 + A_3 + A_4 + A_4^* = 0 \Rightarrow A_{11} = \frac{49}{12150}$$

Si calcola l'anti-trasformata di Laplace della risposta al gradino unitario:

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} \cdot W(s) \right] \Rightarrow$$

$$w(t) = \frac{4}{135} t \cdot e^{-10t} + \frac{49}{12150} \cdot e^{-10t} + \frac{4}{100} - \frac{8}{243} \cdot e^{-t} - \frac{1}{90} \cdot e^{-\frac{5}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{15}}{90} \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)$$

Calcoliamo la risposta al gradino unitario per il sistema ridotto:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s} \cdot G(s) &= \frac{4/100}{s(s+1)} = \frac{4/100}{s} - \frac{4/100}{s+1} \\
g(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} \cdot G(s) \right] = \frac{4}{100} - \frac{4}{100} \cdot e^{-t}
\end{aligned}$$

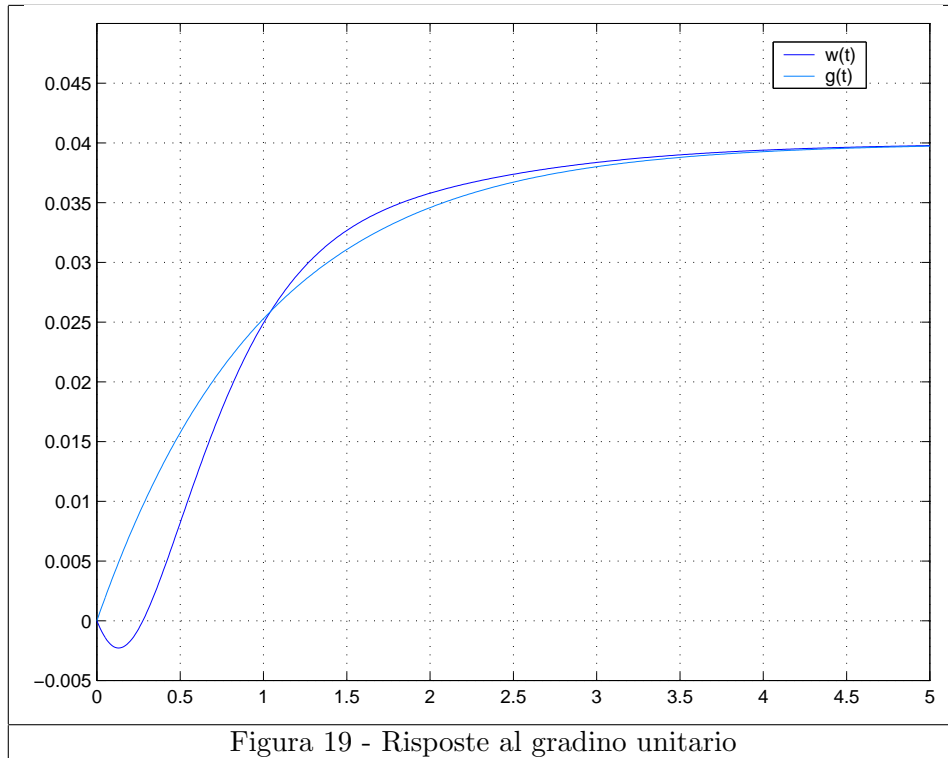


Figura 19 - Risposte al gradino unitario

Si noti che per  $t$  sufficientemente grande, i due segnali tendono a sovrapporsi; merito del modo dominante  $e^{-t}$ .

## Capitolo 5

# Calcolo dell'Overshoot per Sistemi del II° Ordine

In questo capitolo ci occuperemo di calcolare il valore dell'Overshoot della risposta al Gradino Unitario per un sistema del second'ordine. Sia dato il sistema del II° ordine definito dalla sua F.d.T.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot s + \omega^2}$$

La risposta al gradino unitario si ottiene anti-trasformando la funzione

$$\frac{1}{s} \cdot G(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2 \cdot s + A_3}{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot s + \omega^2}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \left. \frac{1}{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot s + \omega^2} \right|_{s=0} = \frac{1}{\omega^2} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{per } s = 1 \quad \Rightarrow \quad A_1 + \frac{A_2 + A_3}{1 + 2\xi\omega + \omega^2} = \frac{1}{1 + 2\xi\omega + \omega^2} \\ \text{per } s = -1 \quad \Rightarrow \quad -A_1 + \frac{-A_2 + A_3}{1 - 2\xi\omega + \omega^2} = -\frac{1}{1 - 2\xi\omega + \omega^2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

da cui segue:

$$A_2 = -\frac{1}{\omega^2}$$

$$A_3 = -\frac{2\xi}{\omega}$$

Quindi:

$$\frac{1}{s} \cdot G(s) = \frac{1}{\omega^2} \cdot \left[ \frac{1}{s} - \frac{s + 2\xi\omega}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} \right]$$

Sapendo che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L} [e^{at} \sin(\omega t)] = \frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2} \\ \mathcal{L} [e^{at} \cos(\omega t)] = \frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2} \end{array} \right.$$

si pone

$$\begin{aligned} \frac{s + 2\xi\omega}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} &= \frac{s + 2\xi\omega}{s^2 + 2\xi\omega s + \xi^2\omega^2 + \omega^2 - \xi^2\omega^2} = \frac{s + 2\xi\omega}{(s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)} = \\ &= \frac{s + \xi\omega}{(s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)} + \frac{\xi\omega}{(s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)} \end{aligned}$$

da cui deriva:

$$\mathcal{L} \left[ \frac{1}{s} \cdot G(s) \right] = h(t) = \frac{1}{\omega^2} \left[ 1 - e^{-\xi\omega t} \cos(\sqrt{1-\xi^2}\omega t) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega t} \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega t) \right]$$

Per determinare il valor massimo della risposta al Gradino Unitario, e quindi della Sovraelongazione, si procede con il calcolo dei punti stazionari della risposta stessa:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \left[ \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\omega} + \frac{\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2}} \right] e^{-\xi\omega t} \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega t) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \omega\sqrt{1-\xi^2} = K\pi \Rightarrow t = \frac{K\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} \end{aligned}$$

Per  $K = 0$  si ha un punto di minimo relativo nell'origine; per  $K = 1$  si ha il valore massimo ricercato <sup>1</sup>.

$$t^* = \frac{\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}}$$

Il valor massimo della risposta, vale:

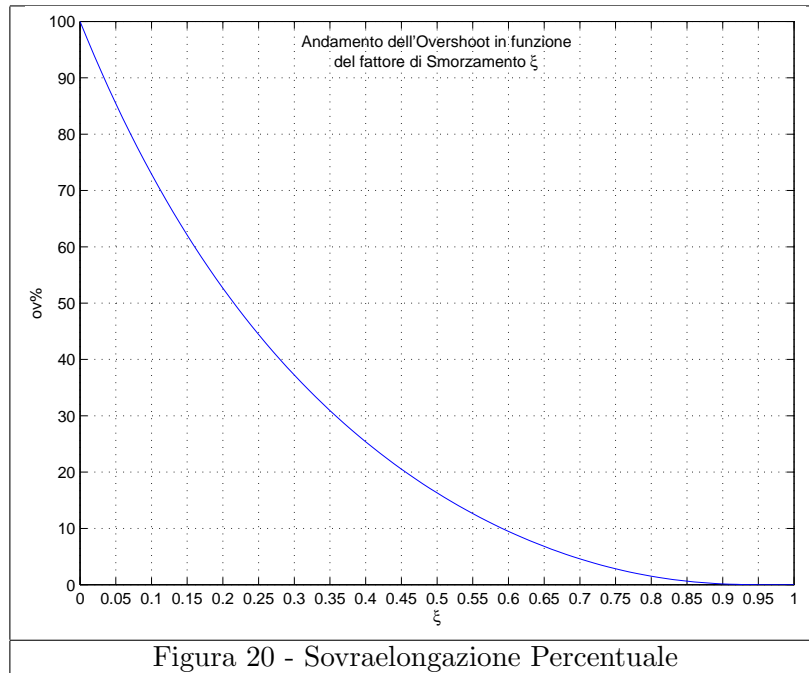
$$h(t^*) = \frac{1}{\omega^2} \left[ 1 + e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \right]$$

Sapendo che il valore di Regime della risposta al gradino, vale  $\frac{1}{\omega^2}$ , si ottiene la Sovraelongazione (Overshoot):

$$ov = h(t^*) - \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2} e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Ovvero la Sovraelongazione percentuale, data da

$$ov\% = \frac{ov}{\frac{1}{\omega^2}} \cdot 100 = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \cdot 100$$



<sup>1</sup>Si ricordi l'andamento della risposta al Gradino Unitario, dei sistemi del II° Ordine

## Capitolo 6

# Diagrammi di Hall & Nichols

### 6.1 Diagrammi di Hall

Dato un sistema descritto dalla sua Funzione di Trasferimento  $G(s)$ , si consideri il sistema stesso chiuso in reazione unitaria, che sarà descritto dalla funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

Si vogliono determinare i luoghi geometrici (sul piano di Gauss) tali per cui

$$|W(s)| = M = \text{cost}$$

Se il sistema chiuso in reazione è asintoticamente stabile, si può considerare la sua risposta Armonica, che al variare della frequenza ( $\omega$ ), descrive una curva sul piano di Gauss.

Poniamo  $G(j\omega) = x + jy$ , da cui  $|(j\omega)| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

$$|W(j\omega)| = \frac{|G(j\omega)|}{|1 + G(j\omega)|} = M \quad \text{cost}$$

elevando entrambi i membri al quadrato:

$$|W(j\omega)|^2 = \frac{|G(j\omega)|^2}{|1 + G(j\omega)|^2} = M^2 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2 + y^2}{|1 + x + jy|^2} = M^2 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{(1 + x)^2 + y^2} = M^2 \Rightarrow (1 - M^2)x^2 + (1 - M^2)y^2 - 2M^2x - M^2 = 0$$

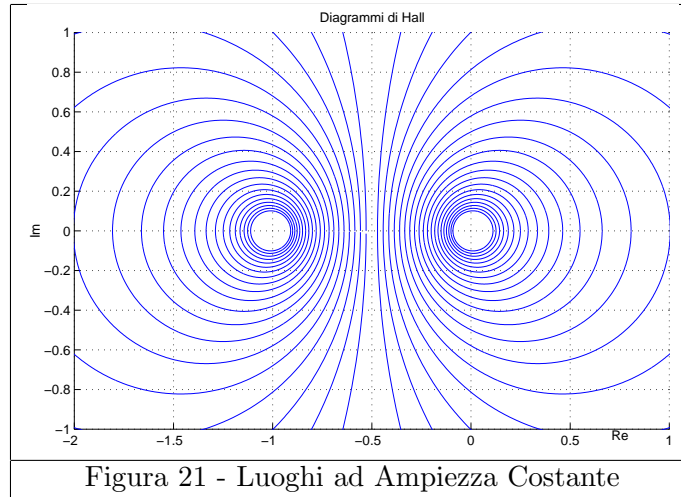
$$x^2 + y^2 - \frac{2M^2}{1 - M^2}x - \frac{M^2}{1 - M^2}$$

Si pone  $a = \frac{2M^2}{1 - M^2}$   $b = \frac{M^2}{1 - M^2}$ , e si ottiene:

$$x^2 + y^2 - ax - b = 0 \Rightarrow x^2 - ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + y^2 - b = 0 \Rightarrow$$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} + b \Rightarrow \left(x - \frac{M^2}{1 - M^2}\right)^2 + y^2 = \frac{M^2}{(1 - M^2)^2}$$

Quest'ultima è l'equazione di una circonferenza di centro  $\left(\frac{M^2}{1 - M^2}, 0\right)$  e raggio  $r = \frac{M}{|1 - M^2|}$ .  
Al variare di  $M$  si ottengono i luoghi cercati:



Con analogia ai luoghi ad Ampiezza costante, si tracciano i luoghi a fase costante:

$$\arg \left[ \frac{x + jy}{(1 + x) + jy} \right] = \phi \quad \text{cost}$$

$$\frac{x + jy}{(1 + x) + jy} = \frac{x + jy}{(1 + x) + jy} \cdot \frac{(1 + x) - jy}{(1 + x) - jy} = \frac{x^2 + y^2 + x - jy}{(1 + x)^2 + y^2}$$

Quindi

$$\arg \left[ \frac{x + jy}{(1 + x) + jy} \right] = \arg[x^2 + y^2 + x - jy] = \phi$$

Si pone  $N = \tan(\phi)$ , quindi deve essere:

$$\frac{y}{x^2 + y^2 + x} = N \Rightarrow x^2 + y^2 + x - \frac{y}{N} = 0$$

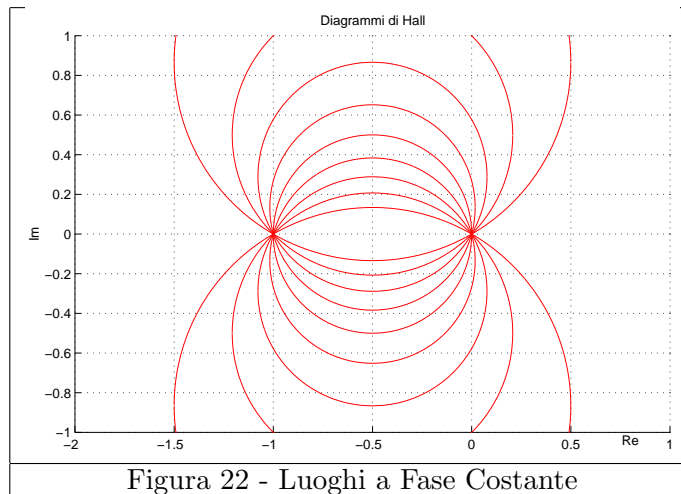
Si può scrivere:

$$x^2 + y^2 + x - \frac{y}{N} = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + y^2 - \frac{y}{N} + \frac{1}{4N^2} - \frac{1}{4N^2} = 0 \Rightarrow$$

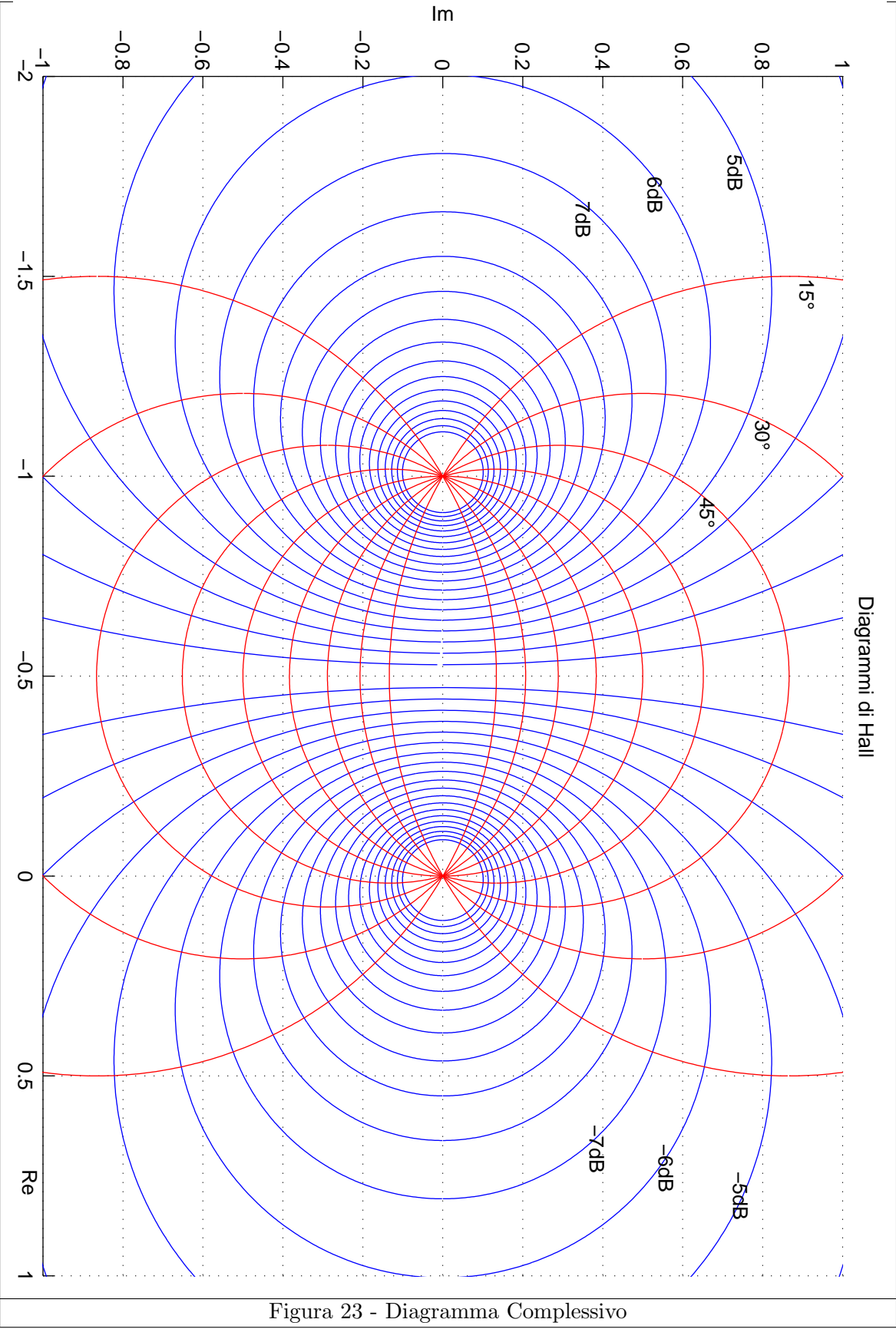
$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{N^2}\right)$$

che è anch'essa una circonferenza di centro  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2N}\right)$  e raggio  $r = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{N^2+1}}{N}$ .

Al variare di  $N$ , si ottengono i luoghi, a fase costante, cercati:



Il diagramma complessivo è:



## 6.2 Diagrammi di Nichols

Nel diagramma di Nichols, la risposta in frequenza viene tracciata in maniera tale che l'ampiezza sia in funzione della fase. Per tracciare i luoghi ad Ampiezza e Fase costante, si considerano i luoghi di Hall (circonferenze), e si riportano sul diagramma di Nichols, mediante le coordinate polari:

- Ampiezza Costante

Si pone  $x = \rho \cos \varphi$  e  $y = \rho \sin \varphi$ , e si sfrutta l'equazione già ricavata in precedenza

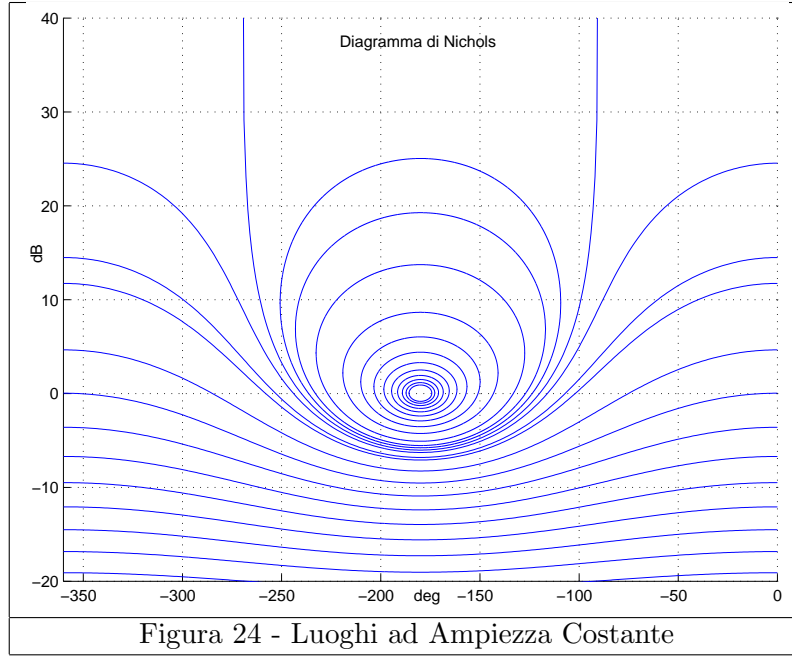
$$x^2 + y^2 - \frac{2M^2}{1 - M^2}x - \frac{M^2}{1 - M^2}$$

ottenendo l'equazione in coordinate polari:

$$\rho^2 - \frac{2M^2}{1 - M^2}\rho \cos \varphi - \frac{M^2}{1 - M^2} = 0$$

Dalla quale, trattandosi di un'equazione di secondo grado nella variabile  $\rho$ , si ricava:

$$\rho(\varphi) = \frac{M^2}{1 - M^2} \cos(\varphi) \pm \frac{M}{|1 - M^2|} \sqrt{1 - M^2 \sin^2(\varphi)}$$



- Fase Costante

Si pone  $x = \rho \cos \varphi$  e  $y = \rho \sin \varphi$ , e si sfrutta l'equazione già ricavata in precedenza

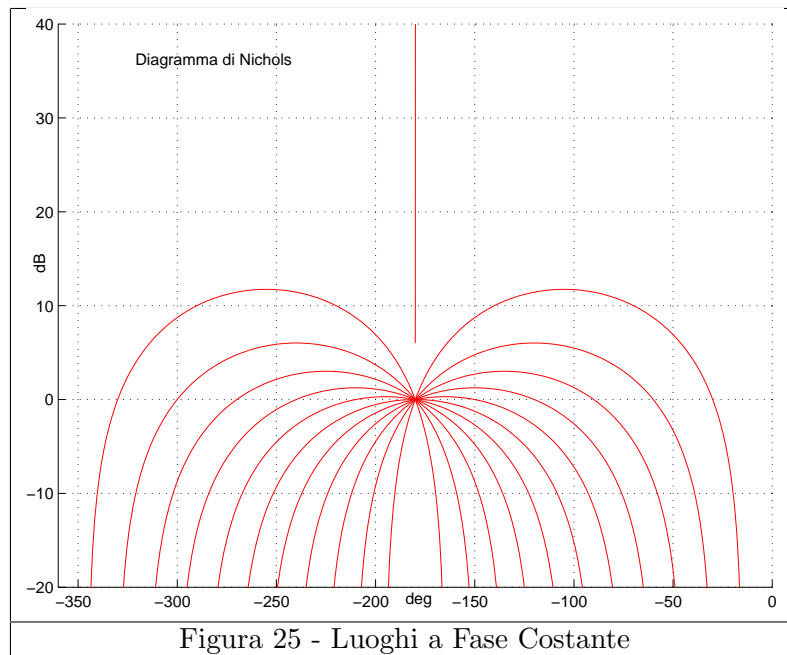
$$x^2 + y^2 + x - \frac{y}{N} = 0$$

ottenendo l'equazione in coordinate polari:

$$\rho + \cos(\varphi) - \frac{1}{N} \sin(\varphi) = 0$$

$$\rho(\varphi) = \frac{1}{N} \sin(\varphi) - \cos(\varphi)$$





Si riporta il diagramma complessivo:

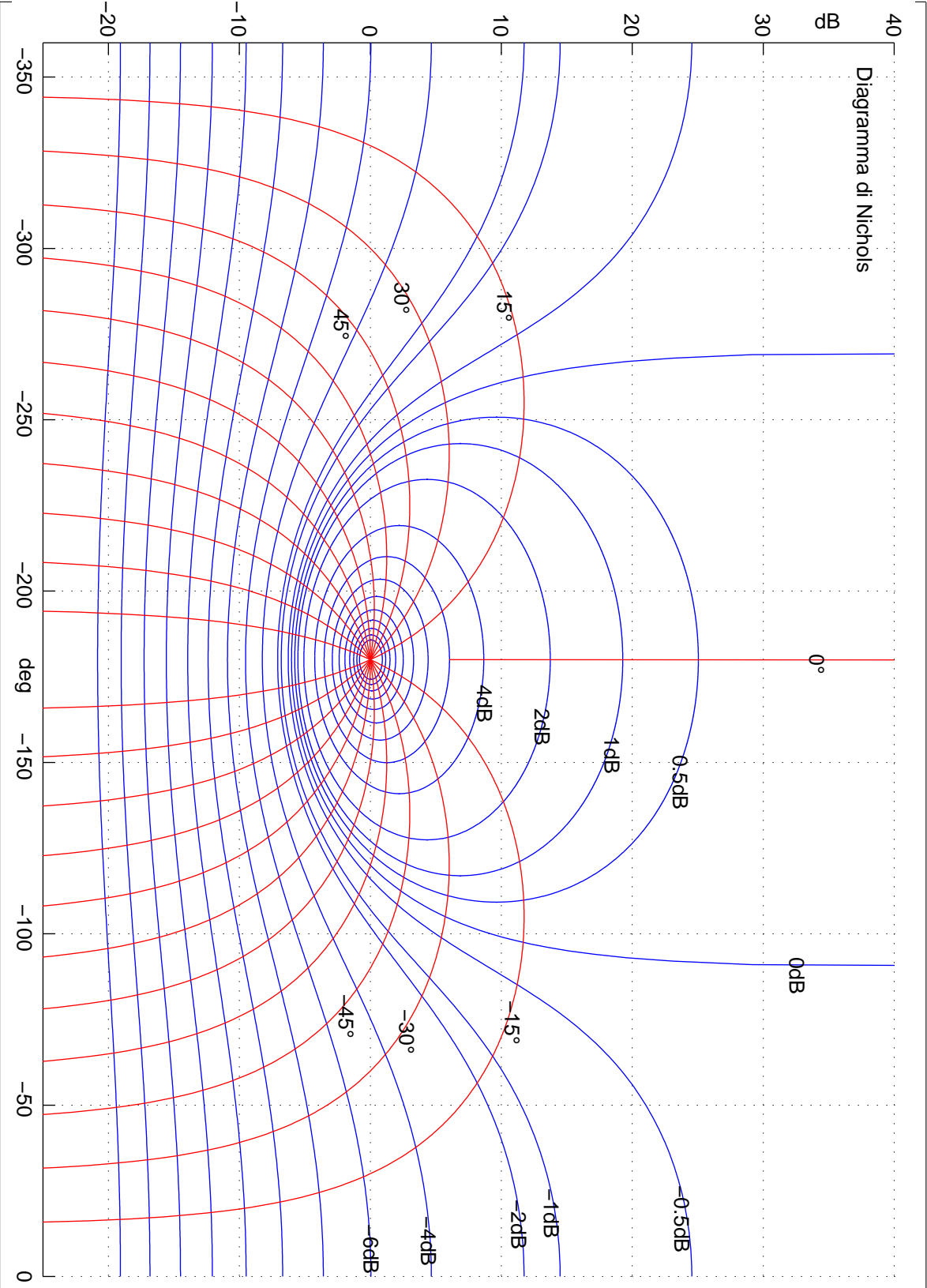


Figura 26 - Diagramma Complessivo