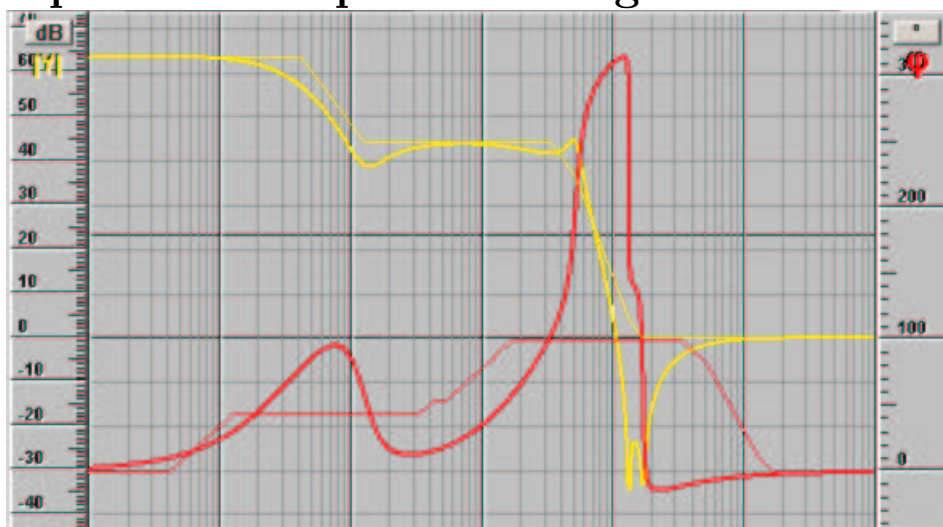


## - Risposta in Frequenza e Diagrammi di Bode -



*(Praticò Andrea)*

16 aprile 2003

## Capitolo 1

# Funzione di Trasferimento & Risposta in Frequenza

Nota la Funzione di Trasferimento  $W(s)$  di un circuito Asintoticamente Stabile<sup>1</sup>, operando la sostituzione  $s = j\omega$ , dove  $\omega$  costituisce la frequenza angolare (variabile); si ottiene la Risposta in Frequenza  $W(j\omega)$ , che consiste in una funzione Complessa di variabile Reale ( $\omega \in \mathbb{R} : \omega > 0$ ).

Una funzione di tal genere è sempre esprimibile in Forma di Bode, nella seguente maniera:

$$W(s) = H \cdot (s)^N \cdot \frac{\prod_i \left(1 \pm \frac{s}{\Omega_i}\right) \cdot \prod_n \left[1 + \left(\frac{s}{\Omega_n}\right)^2 \pm 2\xi_n \frac{s}{\Omega_n}\right]}{\prod_k \left(\frac{s}{\Omega_k} + 1\right) \cdot \prod_h \left[1 + \left(\frac{s}{\Omega_h}\right)^2 + 2\xi_h \frac{s}{\Omega_h}\right]} \quad (\text{nella var. } s)$$

$$W(j\omega) = H \cdot (j\omega)^N \cdot \frac{\prod_i \left(1 \pm \frac{j\omega}{\Omega_i}\right) \cdot \prod_n \left[1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_n}\right)^2 \pm 2\xi_n \frac{j\omega}{\Omega_n}\right]}{\prod_k \left(\frac{j\omega}{\Omega_k} + 1\right) \cdot \prod_h \left[1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_h}\right)^2 + 2\xi_h \frac{j\omega}{\Omega_h}\right]} \quad (\text{nella var. } \omega)$$

N.B. Per essere in forma di Bode, tutti i termini noti devono essere uguali a +1 (attenzione al segno +!)

Oppure in forma di Evans:

$$W(s) = K \cdot (s)^N \cdot \frac{\prod_i (s \pm \Omega_i) \cdot \prod_n [s^2 \pm 2 \cdot \xi_n \cdot \Omega_n \cdot s + \Omega_n^2]}{\prod_k (s + \Omega_k) \cdot \prod_h [s^2 + 2 \cdot \xi_h \cdot \Omega_h \cdot s + \Omega_h^2]} \quad (\text{nella var. } s)$$

N.B. Per essere in Forma di Evans, tutti i polinomi, sia del numeratore, sia del denominatore, devono essere monici nella variabile  $s$ , ovvero con coefficiente della  $s$  di grado massimo (per ogni polinomio) pari a +1.

$$W(j\omega) = K \cdot (j\omega)^N \cdot \frac{\prod_i (j\omega \pm \Omega_i) \cdot \prod_n [-\omega^2 \pm 2 \cdot \xi_n \cdot \Omega_n \cdot j\omega + \Omega_n^2]}{\prod_k (j\omega + \Omega_k) \cdot \prod_h [-\omega^2 + 2 \cdot \xi_h \cdot \Omega_h \cdot j\omega + \Omega_h^2]} \quad (\text{nella var. } \omega)$$

dove si distinguono:

- $H$  Guadagno di Bode
- $K$  Guadagno di Evans

---

<sup>1</sup>i cui poli sono quindi a parte reale strettamente negativa

- le frequenze angolari  $\Omega_i$  che sono le frequenze d'angolo derivanti dagli Zeri Reali della funzione di trasferimento (che possono essere Positivi o Negativi).
- Le frequenze angolari  $\Omega_n$  che derivano dagli zeri Complessi Coniugati della F.d.T. (anch'essi possono essere a parte reale Positiva o Negativa).
- $\Omega_k$  costituenti le frequenze d'angolo derivanti dai Poli Reali Negativi della F.d.T.
- $\Omega_h$  costituenti le frequenze d'angolo derivanti dai Poli Complessi Coniugati a parte reale Negativa della F.d.T.

La quantità  $\xi$  prende il nome di Fattore di Smorzamento ed ha un ruolo importante nel tracciamento dei diagrammi di Bode.

## Capitolo 2

# Diagrammi di Bode

La Risposta in Frequenza, come si è già detto è una funzione complessa a variabile reale, per cui il suo tracciamento richiede due componenti separate che sono il grafico dell'Ampiezza e quello della Fase.

Il diagramma d'ampiezza viene solitamente tracciato su un piano semilogaritmico, ovvero la frequenza angolare viene riportata su scala logaritmica in ascissa, mentre in ordinata è riportato il modulo (Ampiezza) della Risposta in Frequenza, espressa in Decibel (db); ovvero, indicando con  $W(\omega)$  il modulo della Risposta in Frequenza (R.i.F.) in ordinata si ha:  $20 \log[W(\omega)]$ .

### 2.1 Diagramma di Ampiezza

Si ricordi che il modulo del prodotto di due numeri complessi è pari al prodotto dei moduli e che il modulo del rapporto è pari al rapporto dei moduli; infatti presi due numeri complessi:

$$\begin{aligned}\bar{a} &= A \cdot e^{j\theta_1} & \bar{b} &= B \cdot e^{j\theta_2} \\ |\bar{a} \cdot \bar{b}| &= |A \cdot e^{j\theta_1} \cdot B \cdot e^{j\theta_2}| = |A \cdot B e^{j(\theta_1 + \theta_2)}| = A \cdot B\end{aligned}$$

Si omette la dimostrazione (del tutto analoga) per il rapporto.

Quindi, si può scrivere:

$$W(\omega) = |H| \cdot \omega^N \cdot \frac{\prod_i \sqrt{\left(\frac{\omega}{\Omega_i}\right)^2 + 1} \cdot \prod_n \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\xi_n^2 \left(\frac{\omega}{\Omega_n}\right)^2}}{\prod_k \sqrt{\left(\frac{\omega}{\Omega_k}\right)^2 + 1} \cdot \prod_h \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_h}\right)^2\right]^2 + 4\xi_h^2 \left(\frac{\omega}{\Omega_h}\right)^2}}$$

Come accennato nel preambolo, nel diagramma di ampiezza, non viene riportato il valore effettivo dell'ampiezza della R.i.F., ma il corrispondente valore espresso in decibel (db), cioè il valore:

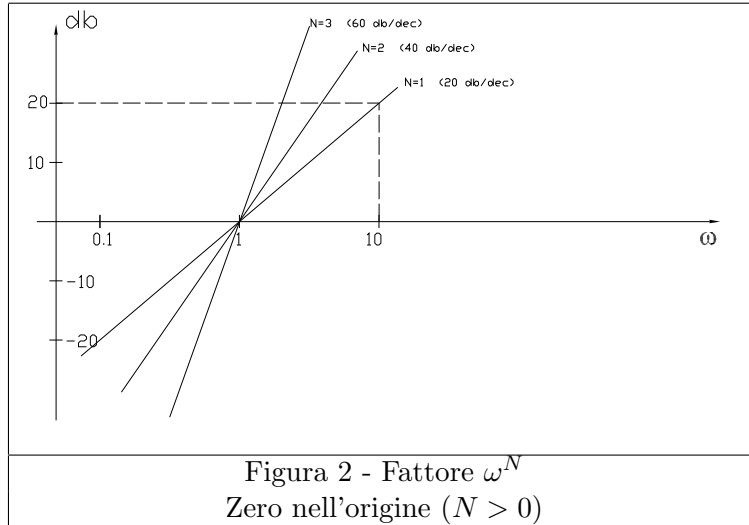
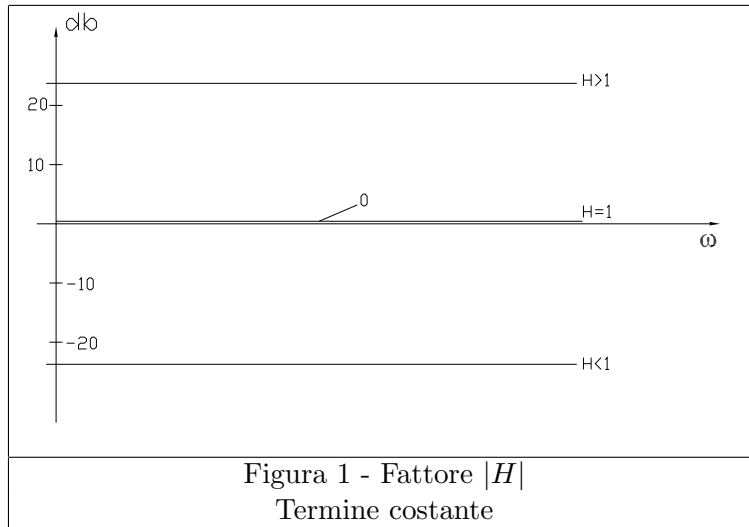
$$20 \log [W(\omega)]$$

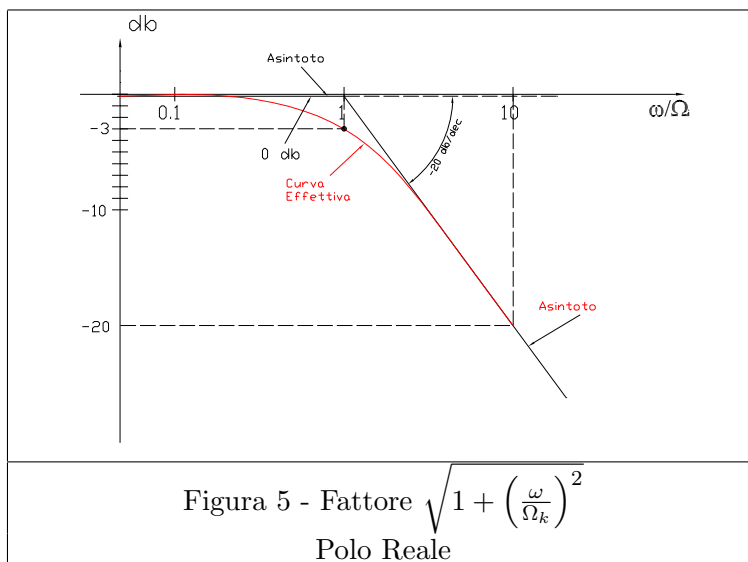
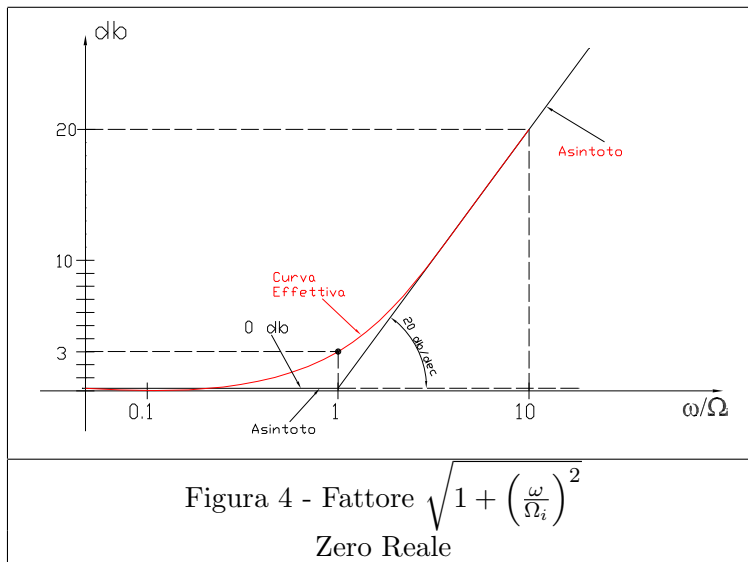
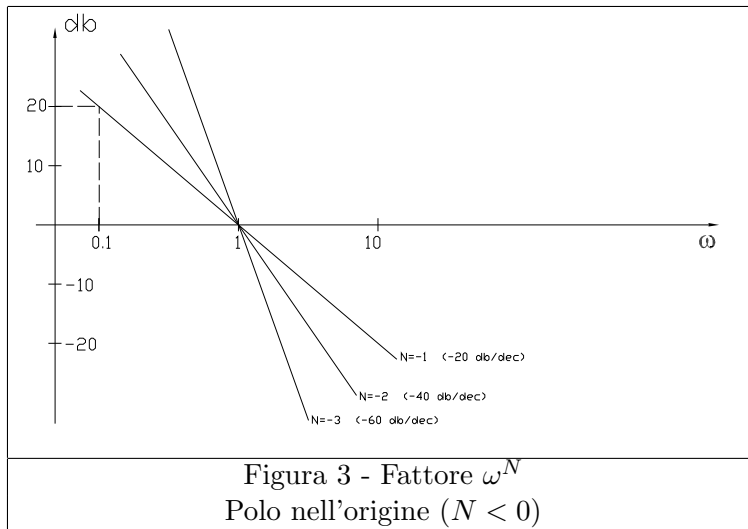
da cui segue immediatamente:

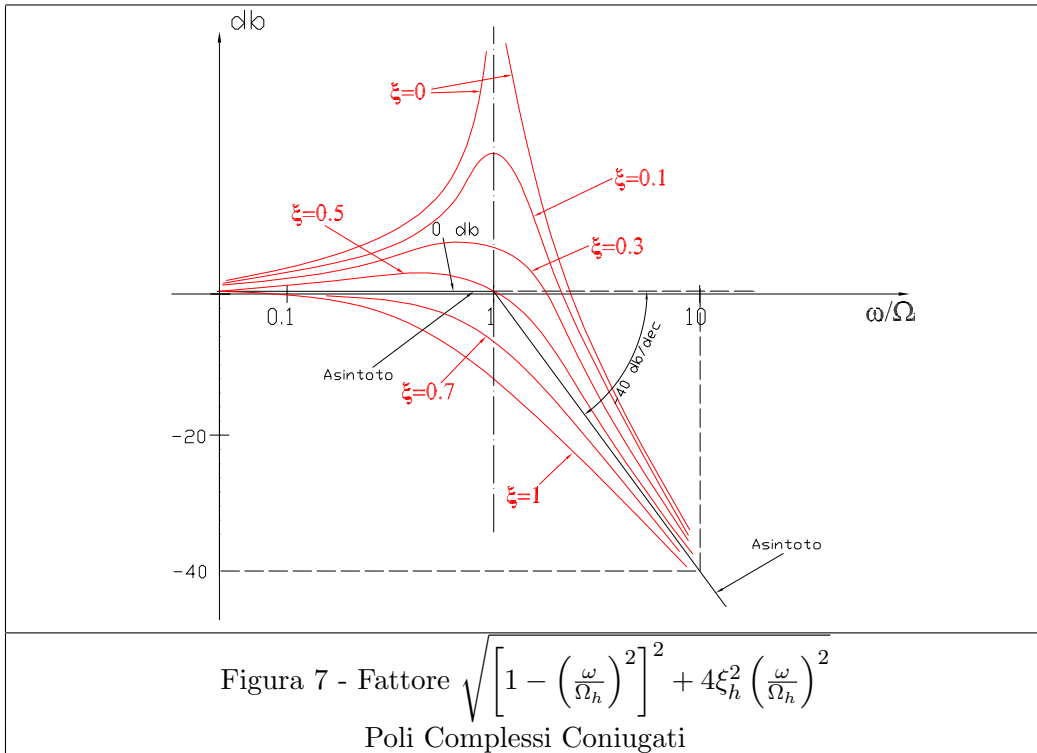
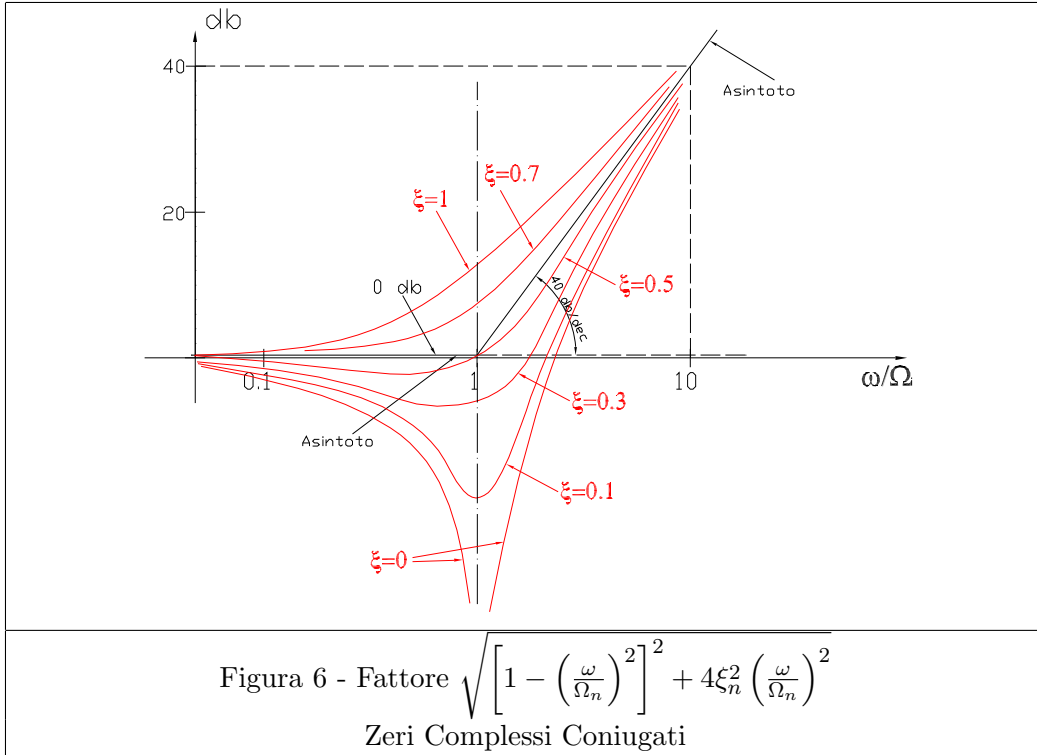
$$\begin{aligned}W(\omega)|_{db} &= 20 \left[ \log(|H|) + \log(\omega^N) + \sum_i \log \left( \sqrt{\left(\frac{\omega}{\Omega_i}\right)^2 + 1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_n \log \left( \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\xi_n^2 \left(\frac{\omega}{\Omega_n}\right)^2} \right) - \sum_k \log \left( \sqrt{\left(\frac{\omega}{\Omega_k}\right)^2 + 1} \right) - \right.\end{aligned}$$

$$+ \sum_h \log \left( \sqrt{\left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\Omega_h} \right)^2 \right]^2 + 4\xi_h^2 \left( \frac{\omega}{\Omega_h} \right)^2} \right)$$

da cui si nota come l'ampiezza della R.i.F. espressa in db sia la sommatoria di elementi "semplici" che verranno studiati singolarmente al fine di valutare il proprio andamento nel diagramma in oggetto. Si riportano gli andamenti Asintotici dell'Ampiezza della Risposta in Frequenza.



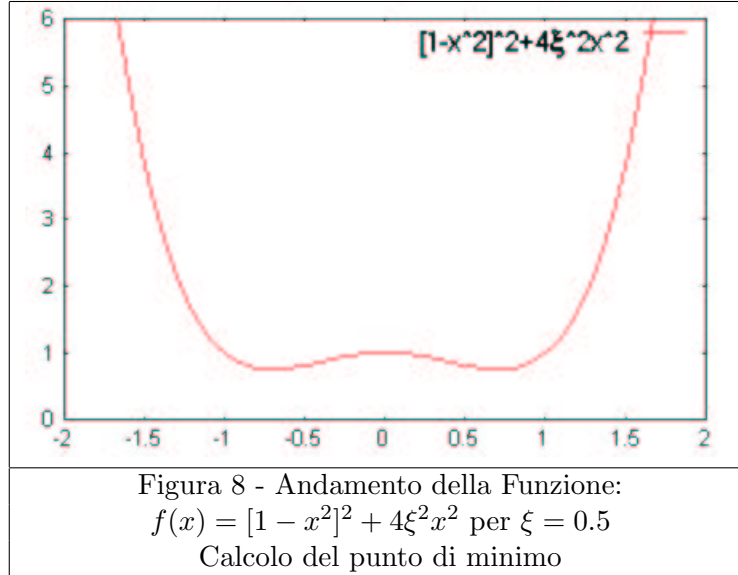




Come si può notare dai grafici soprastanti, relativi ai poli o zeri Complessi Coniugati, l'andamento della curva effettiva è fortemente influenzato dal fattore di smorzamento ( $\xi$ ), per cui è lecito chiedersi quanto valga il valor massimo o minimo raggiunto da tale curva, in funzione del fattore di smorzamento stesso. Per questo, si valuta il modulo del fattore  $\left(1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_i}\right)^2 + 2\xi \frac{j\omega}{\Omega_i}\right)$ :

$$\left|1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_i}\right)^2 + 2\xi \frac{j\omega}{\Omega_i}\right| = \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_i}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\Omega_i}\right)^2}$$

Si pone  $x = \frac{\omega}{\Omega_i}$  e si studia la funzione  $f(x) = [1 - x^2]^2 + 4\xi^2 x^2$ , il cui andamento è:



Per determinare tale punto di minimo è sufficiente determinare gli zeri della derivata prima:

$$f'(x) = 4x(x^2 - 1) + 8\xi^2 x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{1 - 2\xi^2} \end{cases}$$

Considerando che  $x = \frac{\omega}{\Omega_i}$  (con  $\omega > 0$ ), il valore da tenere in considerazione è:

$$x = \sqrt{1 - 2\xi^2} \Rightarrow \omega_r = \Omega_i \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

che prende il nome di “Frequenza di Risonanza”.

Il valore dell’Ampiezza, per  $\omega = \omega_r$  si ottiene sostituendo l’espressione soprastante in quella d’Ampiezza ottenendo il valor minimo dato da:

$$m = 2\xi\sqrt{1 - \xi^2}$$

Con ragionamenti del tutto analoghi si arriva alla conclusione che, se il termine

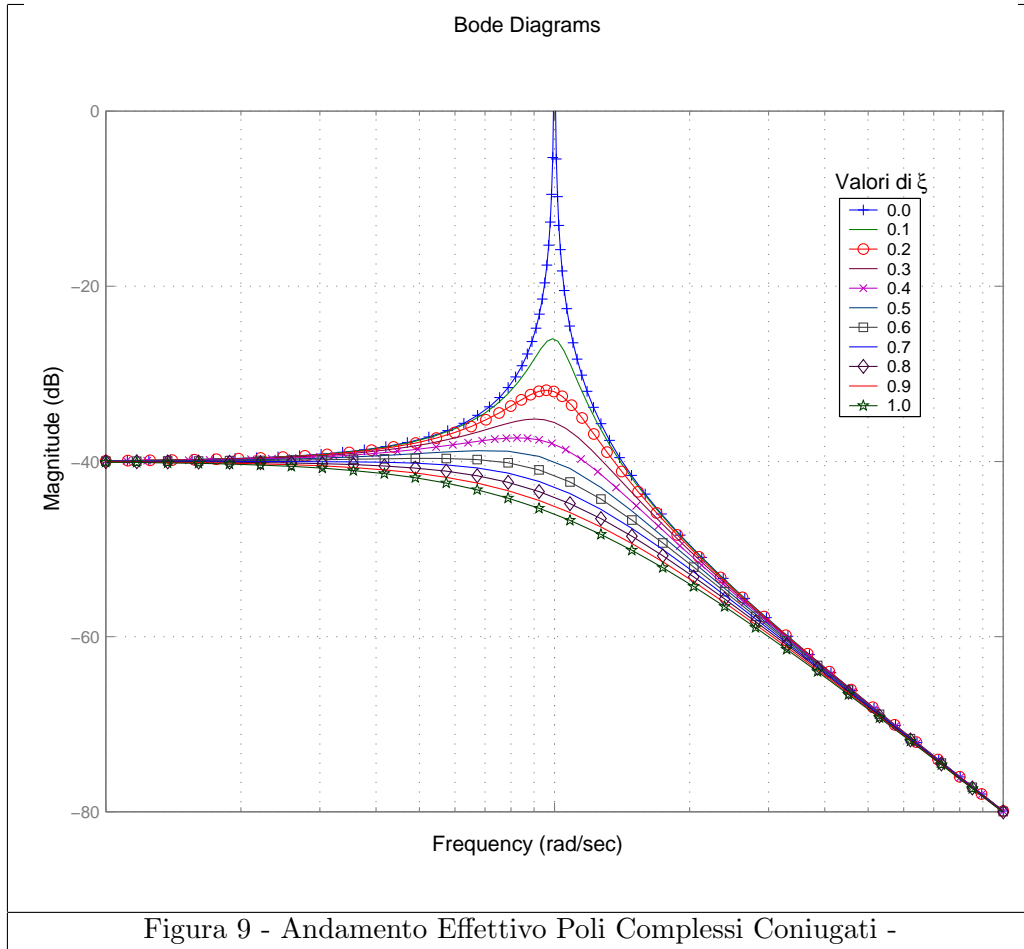
$$\left| 1 - \left( \frac{\omega}{\Omega_i} \right)^2 + 2\xi \frac{j\omega}{\Omega_i} \right|$$

si trova al denominatore della risposta in Frequenza (il termine è, quindi, relativo a poli complessi coniugati), per  $\omega = \omega_r = \Omega_i \sqrt{1 - 2\xi^2}$  si ha il valor Massimo dell’Ampiezza, dato da:

$$M = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Si riporta l’andamento effettivo del diagramma d’Ampiezza di poli complessi coniugati:





Si riporta, inoltre una regola utile per la verifica della correttezza dei diagrammi di Ampiezza:

indicando con  $(m - n)$  l'eccesso poli-zeri ( $m = n$ .di Poli,  $n = n$ .di zeri), la pendenza finale (cioè per  $\omega \rightarrow \infty$ ) del diagramma asintotico d'Ampiezza, deve essere pari a

$$-20 \cdot (m - n) \quad [\text{dB/dec}]$$

## 2.2 Diagramma di Fase

Di seguito vengono riportati gli andamenti asintotici delle singole componenti della risposta in frequenza, relativi ai Diagrammi di Fase (Si osserverà la Risposta in Frequenza, non l'espressione del modulo).

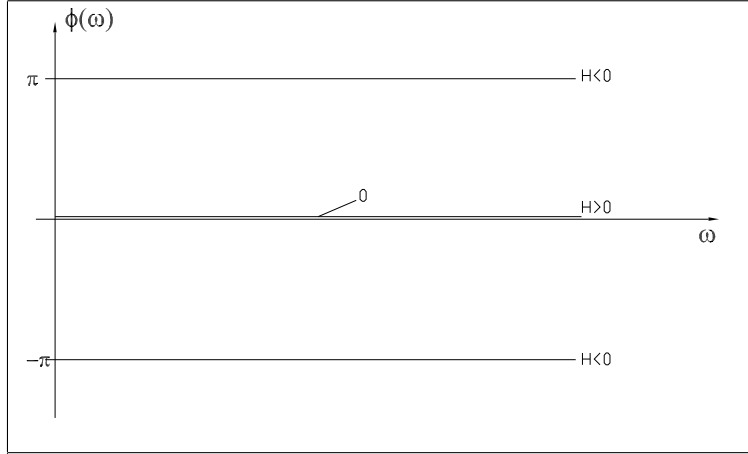


Figura 10 - Fattore  $H$   
Termine costante

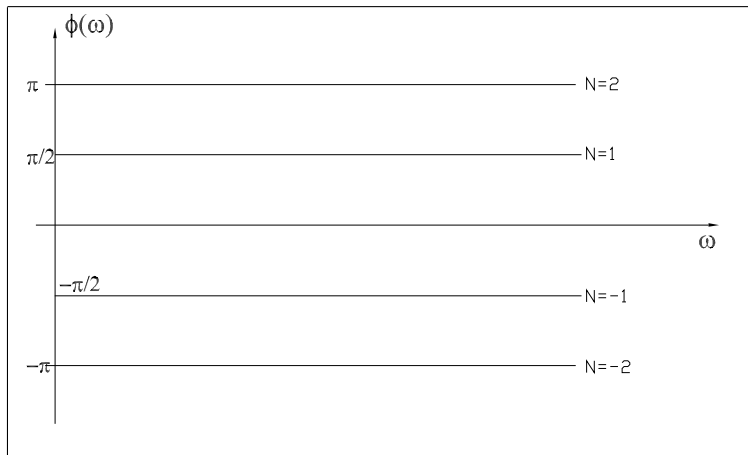


Figura 11 - Fattore  $(j\omega)^N$   
Zero nell'origine ( $N > 0$ ) o Polo nell'origine ( $N < 0$ )

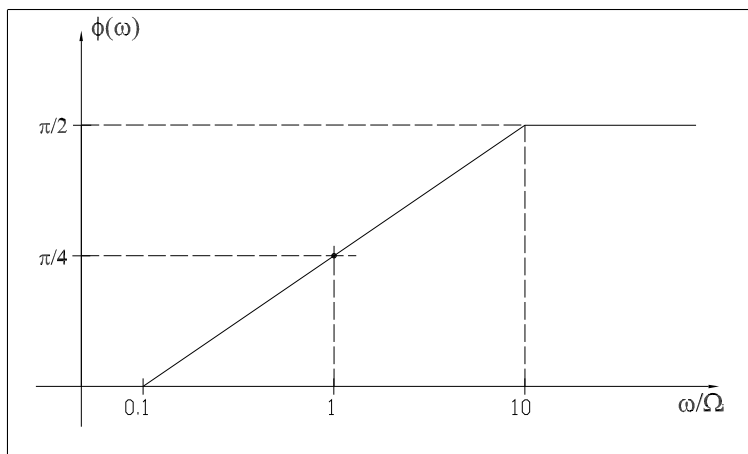


Figura 12 - Fattore  $\left(\frac{j\omega}{\Omega_i} + 1\right)$   
Zero Reale Negativo  
Scala delle frequenze Normalizzata. Ad 1  
corrisponde la frequenza d'angolo propria

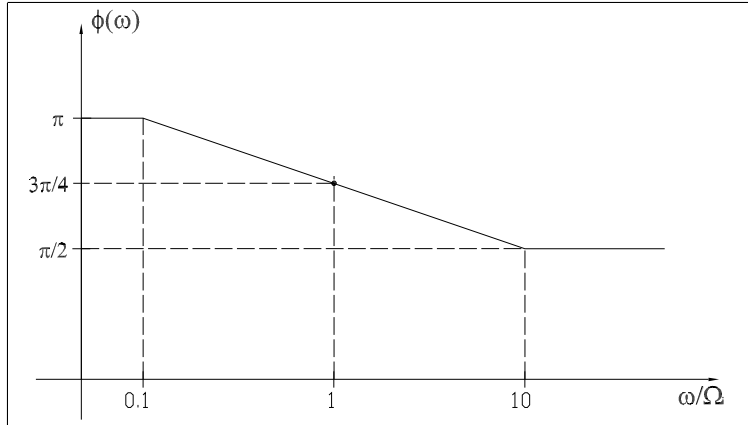


Figura 13 - Fattore  $\left(\frac{j\omega}{\Omega_i} - 1\right)$   
Zero Reale Positivo  
Scala delle frequenze Normalizzata.

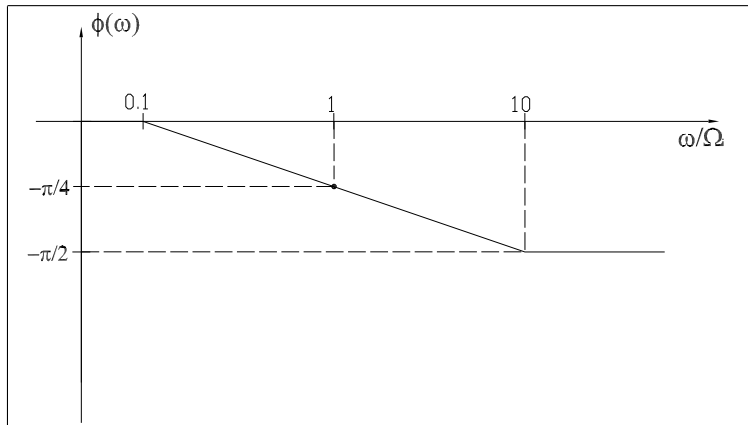


Figura 14 - Fattore  $\left(\frac{j\omega}{\Omega_k} + 1\right)$   
Polo Reale Negativo  
Scala delle frequenze Normalizzata.

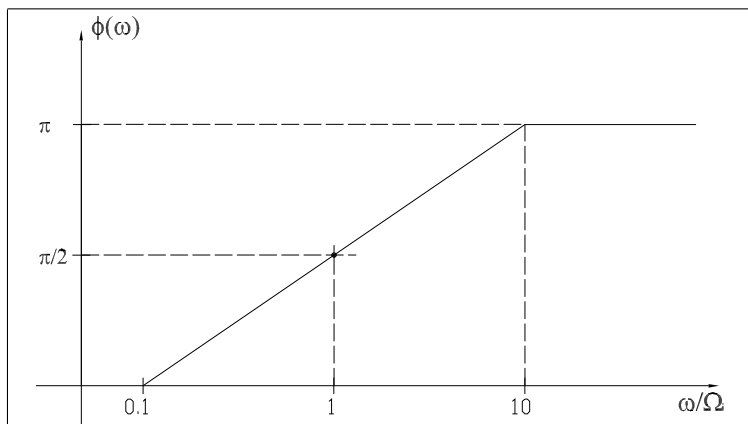
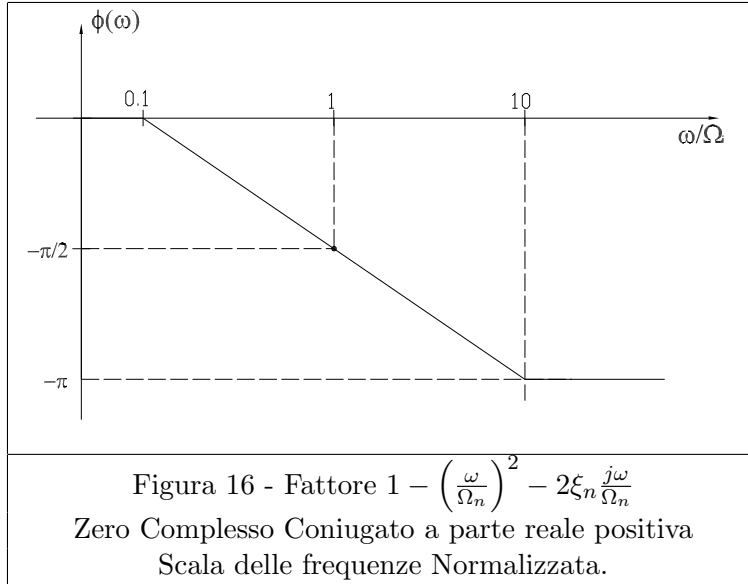
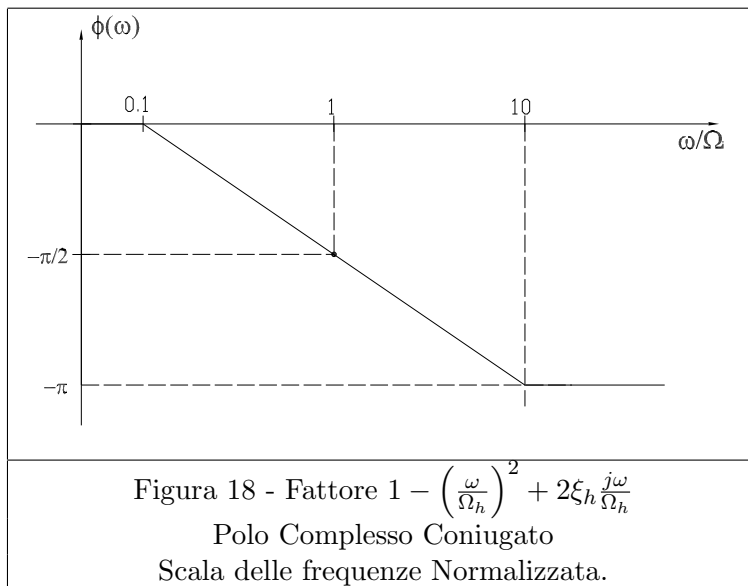
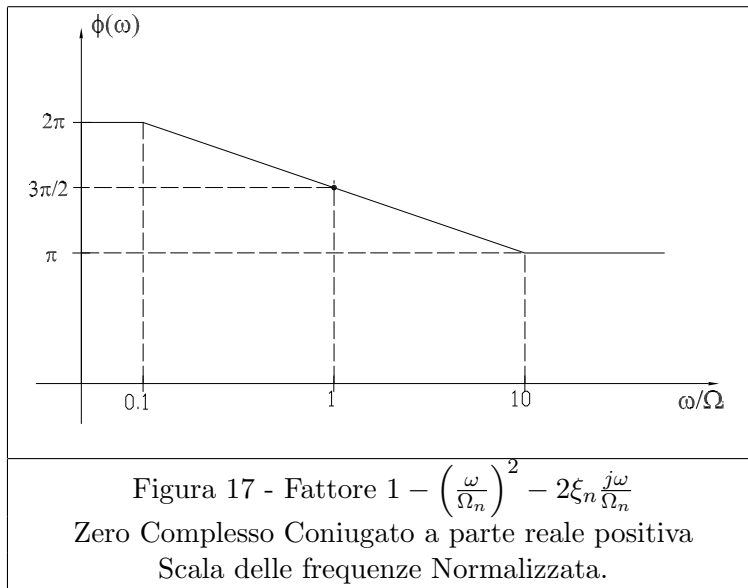


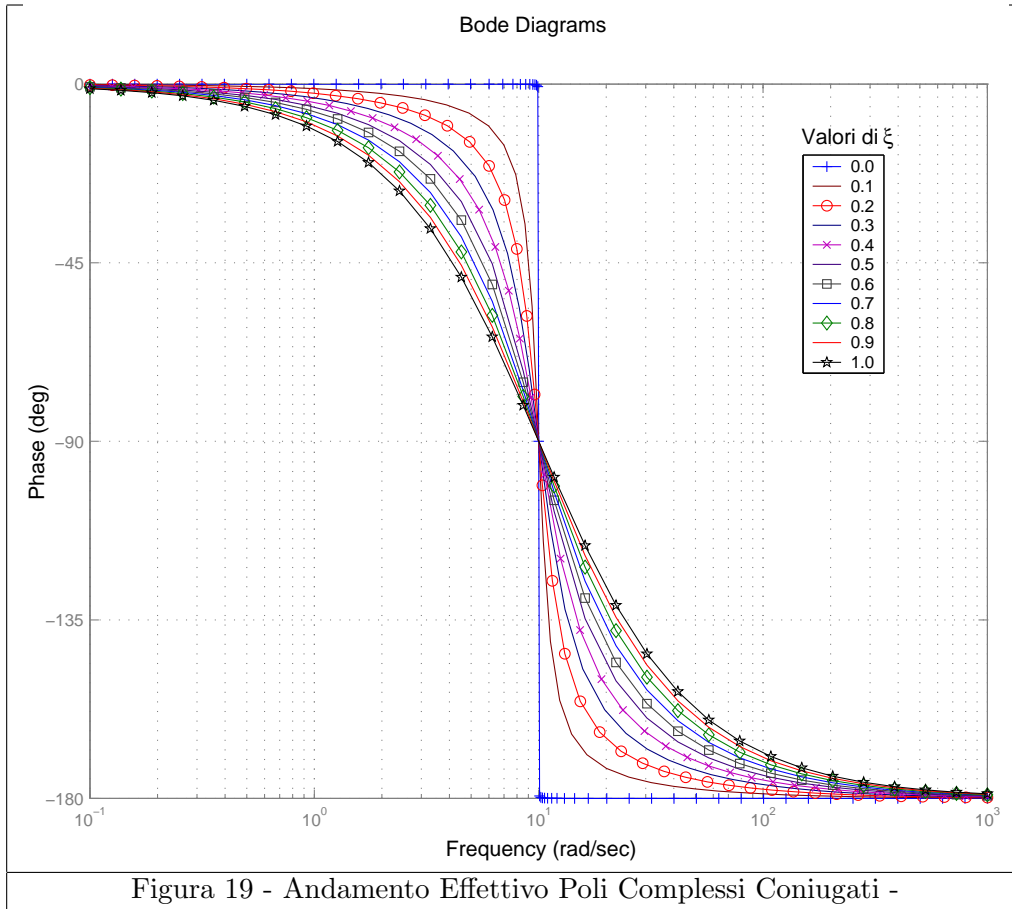
Figura 15 - Fattore  $1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_n}\right)^2 + 2\xi_n \frac{j\omega}{\Omega_n}$   
Zero Complesso Coniugato a parte reale negativa  
Scala delle frequenze Normalizzata.



Per il fattore Precedente vale anche:



Si riporta, anche per i diagrammi di Fase, l'andamento effettivo, al variare del fattore di smorzamento, del diagramma per i poli complessi coniugati:



Anche relativamente ai diagrammi di fase esiste una regola utile per valutare la correttezza del diagramma stesso.

Indicando con  $(m - n)$  l'eccesso poli-zeri ( $m = n$ .di Poli,  $n = n$ .di zeri), si ha che per  $\omega \rightarrow \infty$  la fase deve valere:

$$-\frac{\pi}{2} \cdot (m - n) + \begin{cases} 0 & \text{se il guadagno di Evans (K) è positivo} \\ \pm\pi & \text{se il guadagno di Evans (K) è negativo} \end{cases}$$

## Capitolo 3

# Tracciamento dei Diagrammi di Bode

Verrà indicata una procedura che consenta il tracciamento dei diagrammi di Bode data una funzione di trasferimento nella forma  $\frac{N(s)}{D(s)}$ , dove  $N(s)$  e  $D(s)$  sono polinomi nella variabile  $s$ , a coefficienti Reali.

1. Si fattorizzi il Numeratore  $N(s)$  ed il denominatore  $D(s)$ , in maniera che il grado massimo dei polinomi che vi compaiono sia il secondo.
2. Si ponga la  $G(s)$  in forma di Bode, e si valuti il Guadagno di Bode  $H$ .
3. Si faccia riferimento al piano semilogaritmico e si contrassegnino gli zeri con un tondino “o” e i poli con una “x”. Si osservi che, per l’individuazione dei poli e degli zeri, è conveniente osservare la Forma di Evans e non quella di Bode che, invece, serve solo per determinare il guadagno.
4. Si disegnino gli andamenti asintotici di ciascun fattore della Funzione di Trasferimento, con linea tratteggiata.
5. Si analizzi, sia per il diagramma d’Ampiezza, sia per quello di Fase, ogni singolo settore compreso fra due frequenze di taglio, e si effettui la somma dei diagrammi in linea tratteggiata.

Per semplicità si riporta un esempio pratico:  
sia data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s^3 + s^2 + 98s - 100}{s^5 + 14s^4 + 101s^3 + 14s^2 + 100s}$$

si fattorizza (di solito la funzione di trasferimento, viene già indicata in forma fattorizzata):

$$G(s) = \frac{(s-1)(s^2+2s+100)}{s(s^2+1)(s^2+14s+100)} \quad (\text{Forma di Evans})$$

Si pone in forma di Bode:

$$G(s) = -1 \cdot \frac{(1-s)(1+\frac{2}{100}s+\frac{s^2}{100})}{s(s^2+1)(1+\frac{14}{100}s+\frac{s^2}{100})} \quad (\text{Forma di Bode})$$

si hanno: guadagno  $H = -1 \Rightarrow |H| = 1$ , uno zero in  $\omega = 1$ , due zeri complessi coniugati in  $\omega = 10$  con fattore di smorzamento  $\xi = 0.1$ ; un polo nell’origine, due poli complessi coniugati in  $\omega = 1$  con fattore di smorzamento  $\xi = 0$ , due poli comp.con. in  $\omega = 10$  con fattore di smorzamento  $\xi = 0.7$

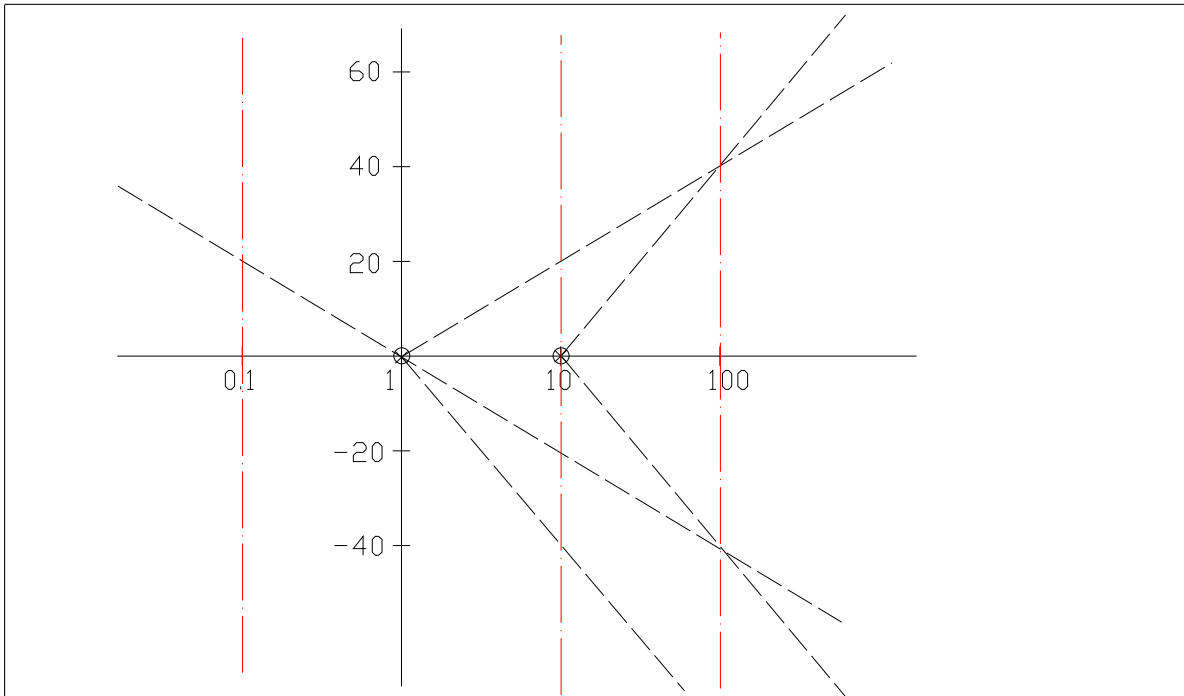


Figura 20 - Diagrammi Asintotici di Ampiezza -

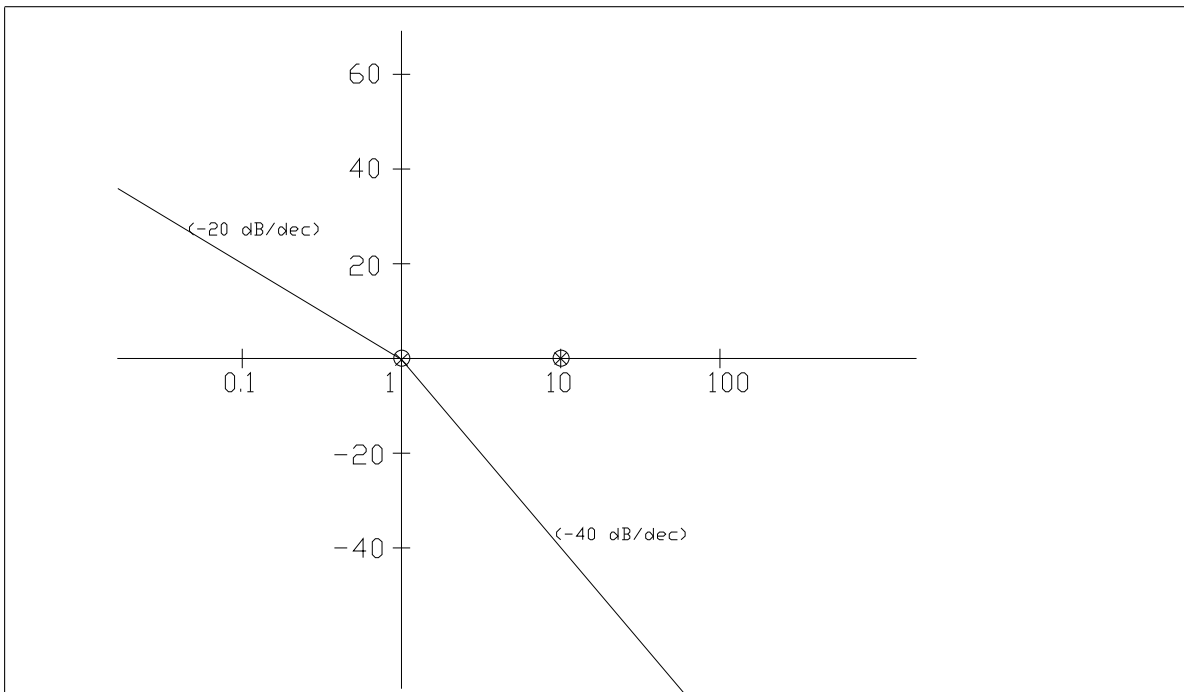
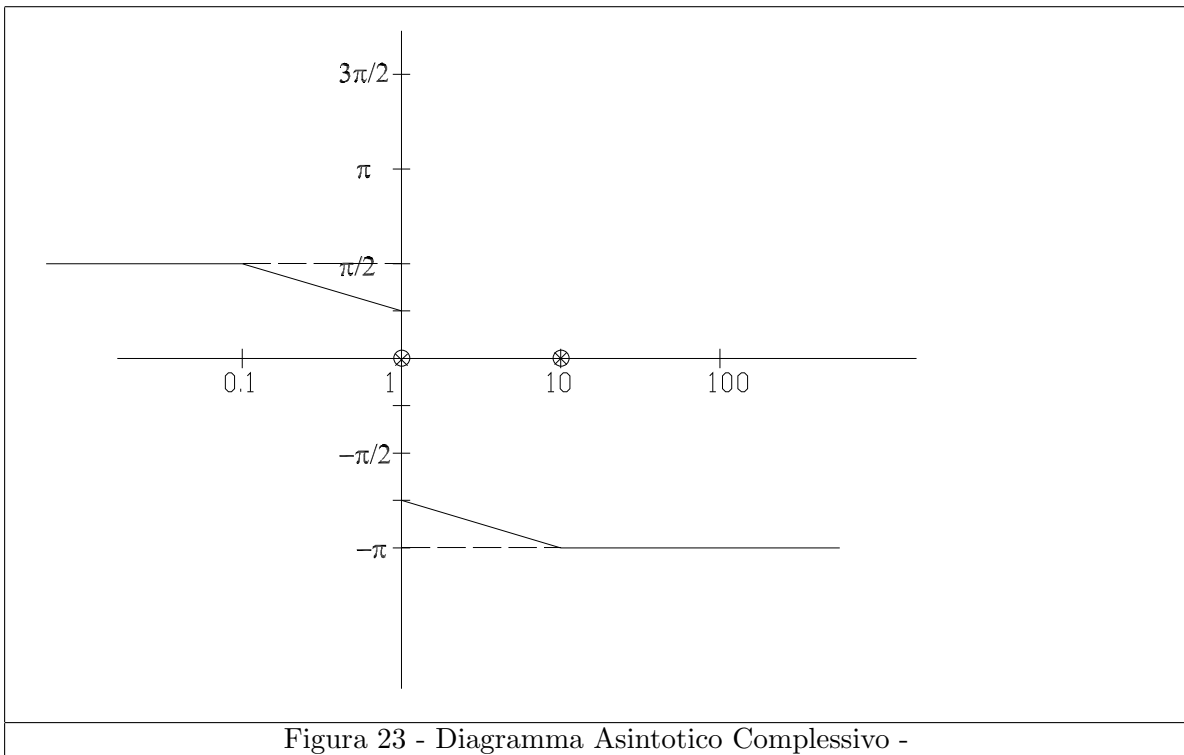
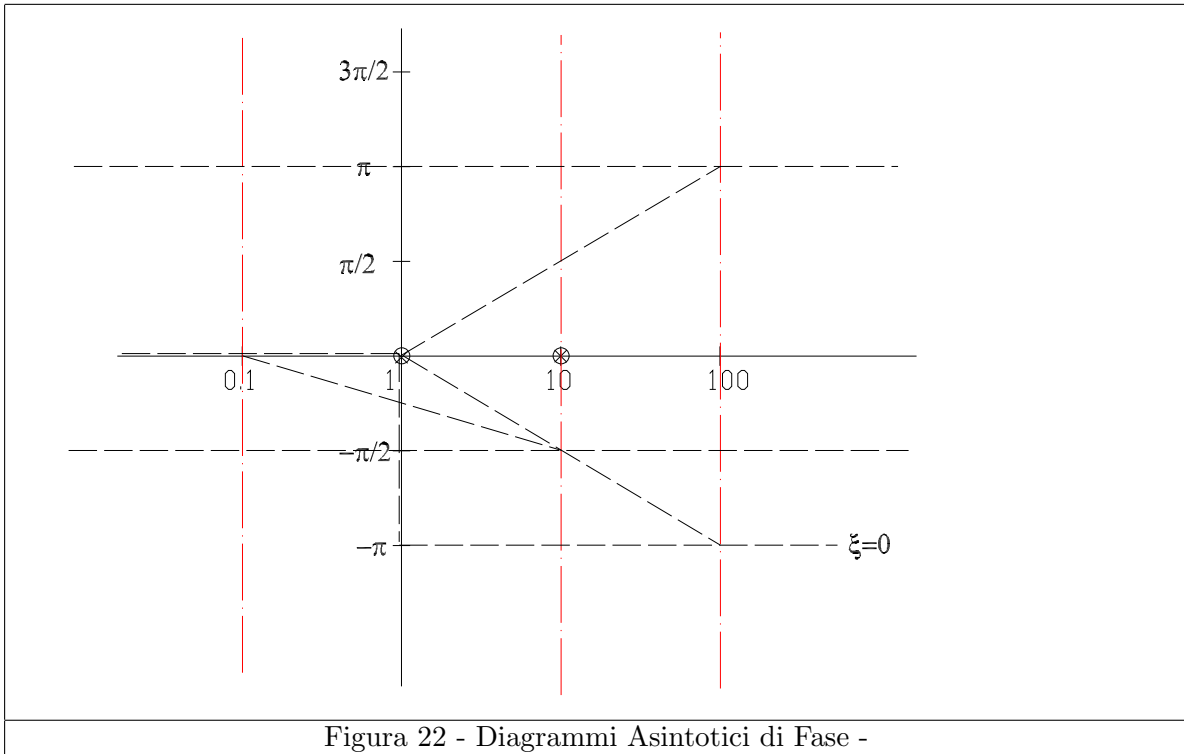


Figura 21 - Diagramma Asintotico Complessivo -

Si osservi che, la condizione per la quale la pendenza finale debba essere  $-20(m - n)$  [dB/dec], resta verificata.



Si osservi che, la condizione per la quale la fase finale deve essere  $-\frac{\pi}{2} \cdot (m - n) + 0$  [rad] resta verificata (si noti che il guadagno di Evans è Positivo).