

Appunti di Elettrotecnica Prof. Bruno Azzerboni A.A. 1999/00

Corrente e resistenza

E' possibile immaginare la corrente come un flusso di palline (cariche) costrette a passare all'interno di un tubo (conduttore). Ovviamente il tubo opporrà una certa resistenza al passaggio delle palline, questo implica che è necessario fare un lavoro, tale lavoro è fornito dal campo elettrico. Dato il conduttore di figura di sezione s e di lunghezza l




è possibile intuire facilmente che tanto più piccola è la sezione e grande la lunghezza del conduttore tanto più le palline hanno difficoltà ad attraversarlo, questo significa che la resistenza che il conduttore offre al passaggio della corrente è inversamente proporzionale alla sezione e direttamente proporzionale alla lunghezza. Quanto detto può essere riassunto dalla seguente formula

$R = \varphi \frac{l}{s}$ dove φ prende il nome di resistività, ed è relativa al materiale di cui è composto il conduttore, pertanto dipende esclusivamente dalle sue caratteristiche chimico fisiche.

Possiamo concludere quindi dicendo che la corrente rappresenta la quantità di carica che fluisce nell'unità di tempo attraverso una sezione del conduttore, cioè $i = \frac{dq}{dt}$.

Bipolo e legge di Ohm

Supponiamo di avere un conduttore lungo svariati km, vogliamo vedere quando è possibile rappresentarlo con il semplice simbolo , un sistema così fatto prende il nome di bipolo. In generale per un sistema che non ha dimensioni fisiche trascurabili rispetto alla causa, l'effetto dipende dallo spazio e dal tempo, al contrario per sistemi che hanno dimensioni fisiche trascurabili rispetto alla causa si può ritenere che l'effetto dipenda esclusivamente dalle caratteristiche del sistema. Nella seconda eventualità si dice che il sistema è a parametri concentrati. Nel caso dei circuiti è possibile dire che un circuito elettrico è a parametri concentrati e quindi riducibile ad un bipolo, quando le sue dimensioni fisiche sono trascurabili se confrontate con la minima lunghezza d'onda che investe il circuito. Per lunghezza d'onda s'intende lo spazio percorso da una perturbazione, rappresentata da una funzione periodica, nel tempo di un periodo, per esempio nel caso delle onde elettromagnetiche la lunghezza d'onda è lo spazio percorso dalla luce in un periodo. E' stato già affermato che la causa del movimento di cariche all'interno di un

conduttore non può che essere un campo elettrico. Dal concetto di campo elettrico scaturisce il concetto di differenza di potenziale (d.d.p.)

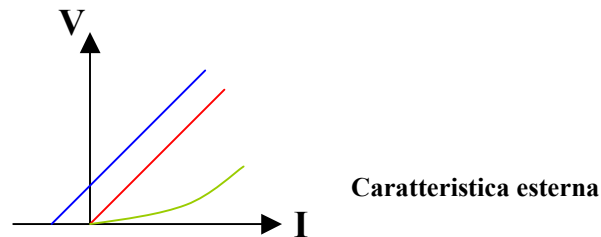
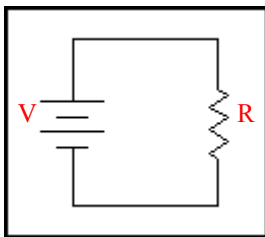


infatti si definisce d.d.p. tra il punto A ed il punto B, il lavoro necessario al campo elettrico per spostare una carica da A a B. I dispositivi in grado di fornire una d.d.p. cioè di compiere questo lavoro, sono detti generatori, più precisamente diremo che questi dispositivi generano una forza elettromotrice (f.e.m.), anche se dimensionalmente questa è la stessa cosa di una d.d.p.

E' importante distinguere i bipoli attivi dai passivi, per bipolo attivo generalmente si intende un bipolo in grado di generare potenza o erogare tensione, al contrario un bipolo è passivo se dissipa energia, il che è equivalente a dire che assorbe potenza.

Da quanto detto è ormai scontato che l'effetto dell'applicazione di una d.d.p. ai morsetti di una resistenza, è la circolazione di una corrente.

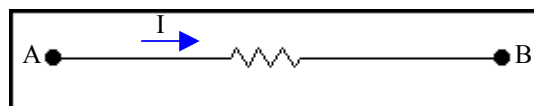
Prende il nome di caratteristica esterna di un circuito, il diagramma in cui sull'asse delle ordinate è riportata la tensione (d.d.p.), e sull'asse delle ascisse la corrente. Supponiamo di avere il circuito di figura



Si dice che il bipolo (resistenza) è lineare se la caratteristica esterna del sistema è la linea rossa di figura, pertanto affinché un bipolo sia lineare è necessario che come caratteristica esterna abbia una retta, inoltre tale retta deve essere passante per l'origine il che vuol dire che per tensione nulla la corrente deve essere nulla, per quello detto il bipolo la cui caratteristica esterna è la linea blu di figura non è lineare, un altro esempio di bipolo non lineare è quello la cui caratteristica è la linea verde. Per quello detto la funzione che rappresenta la caratteristica esterna di un bipolo lineare non può che essere l'equazione di una retta passante per l'origine

$$V = RI$$

Questa è la legge di Ohm, il termine R è la resistenza e rappresenta il coefficiente angolare della caratteristica esterna, rimane da definire il segno. Data la resistenza di figura

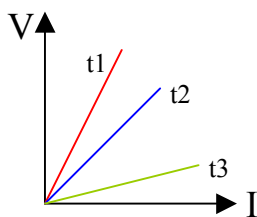


supponendo che sia attraversata dalla corrente nel verso indicato, la d.d.p. tra il punto A e il punto B è $V_{AB} = RI$, mentre la d.d.p. tra il punto B e il punto A è $V_{BA} = -RI$. Da quanto detto possiamo concludere dicendo che la legge di Ohm è

$$V = \pm RI$$

dove il segno più si usa quando il bipolo è percorso nel senso della corrente, mentre il segno meno quando viene percorso in senso opposto.

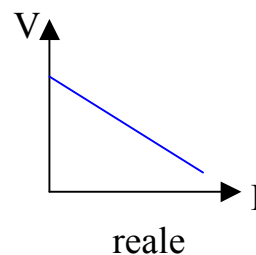
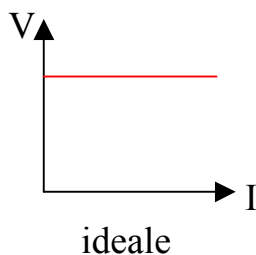
Infine è possibile una distinzione tra bipoli tempo invarianti e tempo varianti. Per bipolo tempo invariante s'intende un bipolo la cui caratteristica esterna non varia nel tempo, inoltre un bipolo tempo invariante può o non può essere lineare. Per capire meglio il concetto facciamo un esempio di bipolo tempo variante lineare



le linee rappresentano la caratteristica esterna del bipolo in tre istanti differenti.

Generatori

Come è stato già detto i generatori, fanno parte dei cosiddetti bipoli attivi, ovvero dei bipoli che generalmente sono in grado di generare potenza o erogare tensione. E' possibile fare una prima classificazione, infatti principalmente i generatori possono essere di tensione o di corrente. Ancora i generatori di tensione o di corrente possono essere ideali o reali. Un generatore è ideale quando non ha alcuna resistenza interna, in altre parole non ha auto consumi. Osservando le caratteristiche esterne qui riportate è possibile notare qual è la differenza sostanziale tra generatore di tensione ideale e reale



pertanto è evidente che un generatore di tensione ideale fornisce una d.d.p. costante indipendentemente dalla corrente che lo attraversa, questo è dovuto al fatto che al suo interno non vi è alcuna resistenza e quindi alcuna caduta di tensione. Al contrario in quello reale la caduta di tensione è tanto più elevata quanto più intensa è la corrente che lo attraversa (per la legge di Ohm). E' possibile quindi concludere che un generatore reale di tensione non è un bipolo lineare, ma è importante precisare che un

sistema comunque complesso è lineare se i bipoli che lo compongono sono lineari fatta eccezione per i generatori.

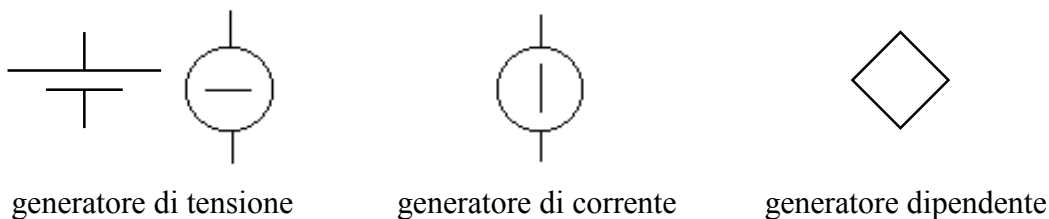
Per generatore di corrente s'intende invece un dispositivo che impone la corrente alla maglia, in altre parole che fa circolare sempre la stessa corrente indipendentemente dal carico. Ovviamente anche in questo caso è possibile distinguere generatori ideali da reali



a differenza del generatore di tensione reale in cui la resistenza interna del dispositivo risulta in serie, questa volta è in parallelo al generatore stesso, da ciò ne segue che un generatore di corrente è ideale quando ha resistenza interna infinita, infatti in tale situazione la corrente erogata coincide con quella che attraversa il carico. Cosa che non avviene come è possibile notare dalla caratteristica esterna se la resistenza ha un valore finito (generatore di corrente reale).

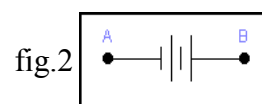
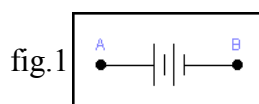
Infine un generatore di tensione o corrente si dice dipendente se la grandezza che esso fornisce dipende da qualche parametro, indipendente altrimenti. Per capire meglio il concetto, quel dispositivo che viene erroneamente chiamato "dinamo" di cui sono fornite le biciclette, è un generatore dipendente, in quanto la tensione da esso generata dipende dalla velocità con cui gira la ruota.

La simbologia generalmente usata per i generatori è la seguente



Legge di Ohm generalizzata

Dato il generatore di figura 1 vogliamo trovare la d.d.p. tra morsetti A e B, pertanto si ha $V_{AB} - E = 0$ per quanto riguarda invece quello di fig. 2 è possibile scrivere



$V_{AB} + E = 0$. Da ciò ne segue la regola che dice: se il verso di percorrenza è concorde con il verso della f.e.m. bisogna prendere la E con segno positivo, con segno negativo se è discorde. Supponiamo adesso che in serie al generatore di tensione vi sia una resistenza, anche se in questo contesto non ha importanza supponiamo che sia la

resistenza interna e quindi che il generatore di tensione sia reale. Consideriamo inoltre che a tale generatore sia connessa una scatola "nera", che potrebbe essere qualunque cosa, da una semplice resistenza a un circuito molto complesso in cui sono presenti più resistenze e generatori. Per quello detto si potrebbe verificare una delle due possibilità schematizzate nella seguente figura



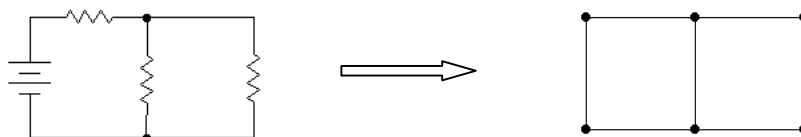
nella fig.2 la corrente è uscente dalla scatola, il che significa che vi è una f.e.m. più elevata di E che si oppone, per questo prende il nome di forza contro elettromotrice (f.c.e.m.). Ricordando la conclusione a cui siamo arrivati prima e la legge di Ohm, per il circuito di fig.1 è possibile scrivere $V_{AB} - E = -RI$, con lo stesso ragionamento per quello di fig.2 $V_{AB} - E = +RI$. Pertanto è possibile concludere che in generale

$$V \pm E = \pm RI$$

questa prende il nome di legge di Ohm generalizzata, e per quello detto il segno più al primo membro va usato se la f.e.m. ha verso concorde a quello di percorrenza, allo stesso modo al secondo membro se è la corrente ad avere verso concorde a quello di percorrenza.

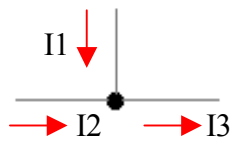
Leggi di Kirchhoff

Vediamo adesso due delle leggi che stanno alla base dello studio dei circuiti. Prima di far ciò è necessario dare qualche definizione. Per nodo s'intende un punto in cui convergono tre o più rami, pertanto il ramo è il tratto di circuito che unisce due nodi, per maglia s'intende invece un qualsiasi percorso chiuso costituito da lati del circuito, una f.e.m. si dice interna ad una maglia se nasce a causa di qualche fenomeno interno alla maglia stessa. Per lo studio dei circuiti elettrici è utile far uso dei cosiddetti grafi, per grafo s'intende quella schematizzazione del circuito ottenuta sostituendo ogni elemento con una linea alle cui estremità vengono disegnati due nodi, come nell'esempio qui di seguito



La prima legge di Kirchhoff o legge ai nodi dice che dato un circuito elettrico a parametri concentrati, nell'ipotesi che in un nodo non vi sia né accumulo né generazione di cariche la somma algebrica delle correnti entranti (o uscenti) è nulla. Il segno alle correnti viene attribuito in base alla convenzione scelta, in altre parole se nella definizione si usa entranti andranno prese come positive le correnti entranti, se

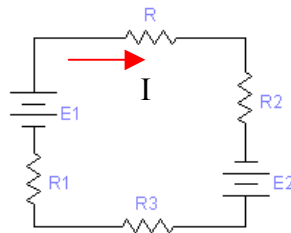
invece si usa uscenti le correnti positive saranno quelle uscenti, nel caso di figura la prima legge di Kirchhoff dice quindi:



$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 &= 0 && \text{(entranti)} \\ -I_1 - I_2 + I_3 &= 0 && \text{(uscenti)} \end{aligned}$$

e ovvio comunque che matematicamente non cambia nulla.

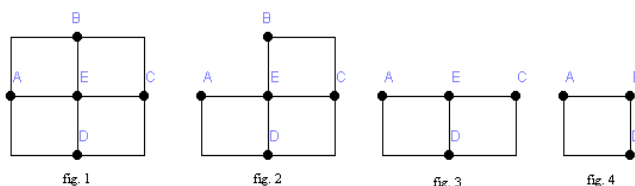
La seconda legge di Kirchhoff chiamata anche legge alle maglie dice che in un circuito a parametri concentrati la somma delle f.e.m. interne od esterne ad una maglia è uguale alla somma delle cadute di tensione nella maglia stessa. Vediamo di capire meglio quanto detto con un esempio. Consideriamo il circuito di figura



come è possibile notare in tale circuito non vi sono nodi e di conseguenza neanche rami, infatti il circuito è semplicemente una maglia, il primo passo da fare è quello di stabilire un verso di percorrenza in modo tale da poter stabilire qual è il segno delle f.e.m. e delle cadute di tensione con le convenzioni che sono già state stabilite quando si è parlato della legge di Ohm generalizzata, detto questo è possibile scrivere l'equazione alla maglia in due modi

$$1) \quad E_1 + E_2 = RI + R_2I + R_3I \qquad 2) \quad -E_1 - E_2 = -RI - R_2I - R_3I$$

dove la 1 sarebbe valida nel caso in cui si scegliesse come verso di percorrenza della maglia quello orario, la 2 se si scegliesse quello antiorario, ovviamente anche in questo caso dal punto di vista matematico le due equazioni sono del tutto equivalenti. In generale risolvere un circuito significa trovare le correnti partendo dai valori delle f.e.m. e delle resistenze. Pertanto se nel circuito sono presenti r rami le correnti incognite sono r , e per trovarle è necessario impostare un sistema di r equazione, con la condizione che le equazioni siano indipendenti. Per far ciò si usano le due leggi di Kirchhoff, l'unico problema sta nel fatto che se in un circuito sono presenti n nodi non è possibile scrivere n equazioni ai nodi, in quanto una di esse sarà combinazione lineare delle altre, pertanto dalla prima legge di Kirchhoff si possono scrivere soltanto $n-1$ equazioni, le rimanenti $r-(n-1)$ si possono ottenere dalla legge alle maglie usando però molta cautela, nel senso che questa volta non è possibile scegliere $r-(n-1)$ maglie a caso, ne tanto meno è sempre possibile intuire con facilità quali sono quelle indipendenti. A tal proposito esiste una regola chiamata regola del taglio, dato il



circuito di fig. 1, tale regola suggerisce di scegliere una maglia qualsiasi, scegliamo per esempio la maglia ABEA, di scrivere l'equazione a tale maglia e di tagliare un ramo qualsiasi

appartenente alla maglia stessa, per esempio potremmo decidere di tagliare il ramo AB, fatto ciò rimane il circuito di fig.2. Ripetendo il procedimento scegliendo per esempio la maglia BCEB e tagliando il ramo BC, si ha il circuito di fig.3, ripetendo ancora una volta il procedimento per la maglia ECDE si ottiene il circuito di fig.4 a cui è possibile applicare la legge alle maglie. Alla fine quindi sono state scritte quattro equazioni indipendenti, essendo il numero di rami del circuito di partenza otto ($r = 8$), il numero di nodi cinque ($n = 5$), con legge alle maglie è necessario scrivere quattro equazioni indipendenti ($r-n+1$), che sono proprio quelle che sono state ottenute applicando la regola del taglio.

Composizione dei bipoli passivi

Cominciamo con qualche definizione. Un sistema è equivalente ad un altro se ai fini esterni presenta le stesse caratteristiche. Due bipoli sono in serie se sono percorsi dalla stessa corrente e generalmente ai loro morsetti insiste una d.d.p. diversa. Due bipoli si dicono in parallelo se ai loro morsetti insiste la stessa d.d.p. e generalmente sono attraversati da correnti diverse.

Date due resistenze in serie vogliamo trovare un sistema equivalente, o per meglio dire una resistenza equivalente. Pertanto per la definizione data di sistema equivalente dobbiamo trovare la resistenza che sottoposta ad una determinata d.d.p. deve essere attraversata dalla stessa corrente che attraverserebbe la serie se fosse

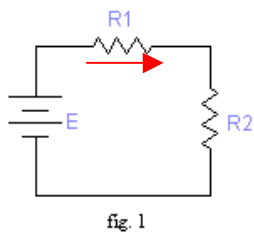


fig. 1

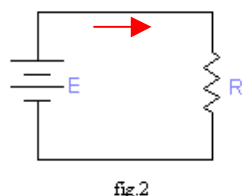


fig. 2

sottoposta alla stessa d.d.p., cioè vogliamo semplificare il circuito di fig.1 in quello di fig.2. Come verso di percorrenza scegliamo in entrambi i circuiti quello orario, pertanto l'equazione alla maglia relativa al circuito di fig.1 è $E = I(R_1 + R_2)$, a quello di fig.2 $E = RI$

Pertanto essendo la E e la I dei due circuiti uguali non può che essere $R = R_1 + R_2$. In generale date N resistenze in serie si ha

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i$$

Consideriamo adesso la connessione di due resistenze in parallelo, vogliamo trovare il sistema equivalente, anche in questo caso si tratta di trovare la resistenza che sottoposta ad una determinata d.d.p. sia attraversata dalla stessa corrente che

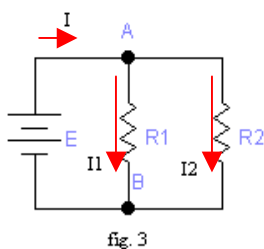


fig. 3

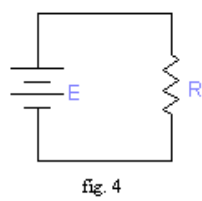


fig. 4

attraverserebbe il parallelo sottoposto alla stessa d.d.p. Consideriamo dapprima il circuito di fig.3, scriviamo le equazioni alle maglie E-A-R1-B-E, E-A-R2-B-E, e l'equazione al nodo A

$$E = R_1 I_1 \quad E = R_2 I_2 \quad I = I_1 + I_2$$

ricavando I1 e la I2 dalle prime due relazioni e sostituendole nella terza, si ottiene

$$E = \frac{I}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

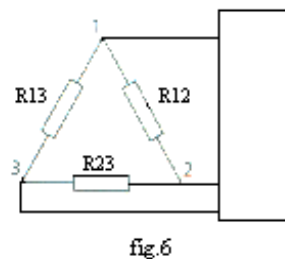
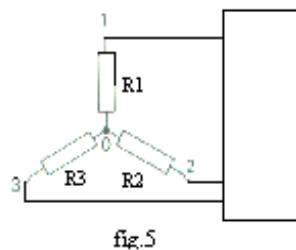
applicando la seconda legge di Kirchhoff al circuito di fig.4 si ha $E = RI$ ricordando che affinché questo sia equivalente al circuito di fig.3 è necessario che per il generatore non cambi nulla, in altre parole che la E e la I siano uguali in entrambi i circuiti, non può che essere

$$R = \frac{I}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

in generale date N resistenze in parallelo si ha

$$R_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N R_i}$$

Come è intuitivo capire il circuito di fig.5 prende il nome di collegamento stella, quello di fig.6 collegamento triangolo



Vogliamo vedere come si fa a calcolare i valori che devono avere le resistenze in un collegamento triangolo noti quelli delle resistenze nel collegamento stella. A tal proposito è di aiuto considerare la resistenza equivalente relativa al parallelo di R1 R2 e R3 anche se ovviamente non sono in parallelo, pertanto chiamata R_p la resistenza di parallelo si ha

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_p}$$

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_p}$$

$$R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_p}$$

Per passare invece da un collegamento triangolo ad uno stella è conveniente considerare la resistenza serie R_s , ed in questo caso si ha

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{13}}{R_s}$$

$$R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_s}$$

$$R_3 = \frac{R_{13} R_{23}}{R_s}$$

Consideriamo nuovamente il circuito di fig.1, è possibile verificare con la legge di Ohm che se le resistenze sono diverse le tensioni ai loro morsetti saranno di conseguenza differenti, ma d'altra parte per la seconda legge di Kirchhoff la loro somma deve essere uguale alla f.e.m. erogata generatore. E' quindi possibile concludere che la f.e.m. si ripartisce sulle resistenze, vediamo di ricavare la relazione matematica che regola queste tensioni

dalla legge di Ohm $V_{R1} = R_1 I$

dall'equazione alla maglia $I = \frac{E}{R_1 + R_2}$

sostituendo la 2° nella 1° si ottiene

$$V_{R1} = R_1 \frac{E}{R_1 + R_2}$$

il circuito di fig.1 prende il nome di partitore di tensione, e la formula ricavata formula del partitore di tensione.

Consideriamo adesso il circuito di fig.3, in questo caso se R_1 è diversa da R_2 saranno le correnti I_1 e I_2 ad essere diverse, ma per la prima legge di Kirchhoff la loro somma dovrà essere uguale alla corrente I . Calcoliamo adesso la d.d.p. tra i nodi A e B in due modi differenti, applicando la legge di Ohm al ramo A-R1-B e al circuito equivalente

$$V_{AB} = R_1 I_1 \quad V_{AB} = R_p I \quad \text{dove } R_p \text{ è la resistenza equivalente al parallelo delle due}$$

pertanto $R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, dalle prime due segue $R_1 I_1 = R_p I$ da cui si ottiene

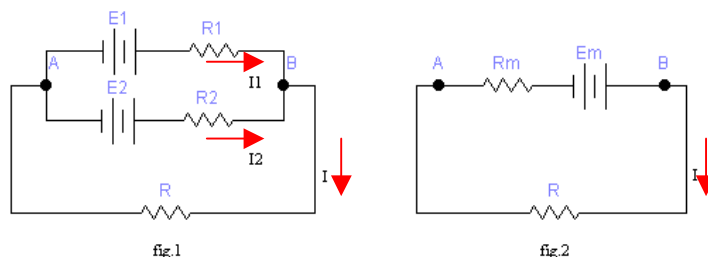
$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$$

il circuito di fig.3 prende il nome di partitore di corrente, e la formula ricavata formula del partitore di corrente. Se il verso di I_1 fosse stato opposto ovviamente nella formula ci sarebbe stato un segno meno, questo porta alla regola generale che dice, il segno da mettere nella formula del partitore di corrente è più se il verso della corrente che si vuole trovare è concorde con quello della corrente che entra nel parallelo meno altrimenti. E' possibile notare che questa formula somiglia a quella ricavata per il partitore di tensione, ovviamente in questo caso compaiono le correnti e non le tensione, l'unica differenza sta nel fatto che al numeratore non si ha la resistenza del ramo interessato ma dell'altro.

Teorema di Millman

Tale teorema afferma che dati N rami in parallelo, in ognuno dei quali è presente un generatore di f.e.m con in serie una resistenza, è equivalente ad un sistema formato da un generatore di f.e.m. pari alla media pesata delle f.e.m. con pesi le conduttanze, in serie ad una resistenza il cui valore è dato dal parallelo delle resistenze dei rami.

Dimostriamolo per due rami



supponiamo di avere il circuito di fig.1, volgiamo ridurlo a quello di fig.2, è pertanto necessario trovare la f.e.m. e la resistenza di Millman. Scriviamo la legge di Ohm generalizzata ai rami A-E1-R1-B e A-E2-R2-B:

$$\begin{cases} V_{AB} = -E_1 + R_1 I_1 \\ V_{AB} = -E_2 + R_2 I_2 \end{cases}$$

dividendo la prima per R_1 e la seconda per R_2 si ottiene

$$\begin{cases} \frac{V_{AB}}{R_1} = -\frac{E_1}{R_1} + I_1 \\ \frac{V_{AB}}{R_2} = -\frac{E_2}{R_2} + I_2 \end{cases} \quad \text{sommando membro a membro} \quad V_{AB} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = -\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + I_1 + I_2$$

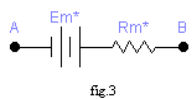
essendo per la legge ai nodi $I = I_1 + I_2$, con qualche passaggio si ha

$$V_{AB} = -\frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} I \quad \text{per il circuito di fig. 2 si ha} \quad V_{AB} = -E_M + R_M I$$

confrontando le due equazioni si conclude facilmente che

$$E_M = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad (\text{f.e.m. di Millman}) \quad R_M = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad (\text{resistenza di Millman})$$

Supponiamo invece di voler trovare direttamente la d.d.p ai nodi A e B. Per far ciò è necessario un artificio, questo consiste nel supporre che nel ramo A-R-B di fig.1 ci sia un generatore di f.e.m. nulla, è intuitivo capire che questo artificio ci permette di applicare il teorema di Millman e di ottenere il circuito equivalente di fig. 3. Si ha



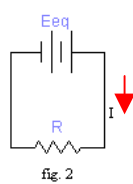
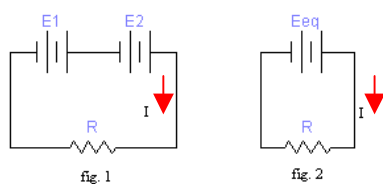
$$E_M^* = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2 + E_3 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \quad R_M^* = \frac{1}{G_1 + G_2 + G_3}$$

Ovviamente $E_3 = 0$, comunque è consigliabile scriverlo nella formula in modo tale da non dimenticare di scrivere G_3 nella formula per il calcolo di R . Per cui una volta fatto questo è possibile trovare la d.d.p tra A e B mediante la legge di Ohm generalizzata.

Ritornando al caso generale è il caso di prestare attenzione ai segni delle f.e.m., infatti bisogna dapprima fissare il verso della f.e.m. del circuito equivalente, nel nostro caso quello di fig.2, fatto questo bisogna prendere con segno positivo le f.e.m. concordi a tale verso, e con segno negativo quelle discordi.

Composizione dei bipoli attivi e principio di sovrapposizione degli effetti

Supponiamo di avere come illustrato in fig.1 due generatori in serie, vogliamo trovare il valore della f.e.m. che deve fornire il generatore relativo al circuito di fig.2, affinché la corrente nei due circuiti sia la stessa. Appliciamo la seconda legge di Kirchhoff ai due circuiti

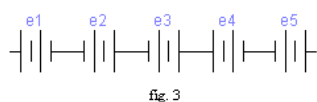


$$E_1 + E_2 = RI \quad E_{eq} = RI$$

$$\text{da cui si ha } E_{eq} = E_1 + E_2$$

vale a dire un sistema

costituito da N generatori in serie, è equivalente ad un unico sistema formato da un solo generatore la cui f.e.m. è data dalla somma algebrica delle singole f.e.m. Per stabilire

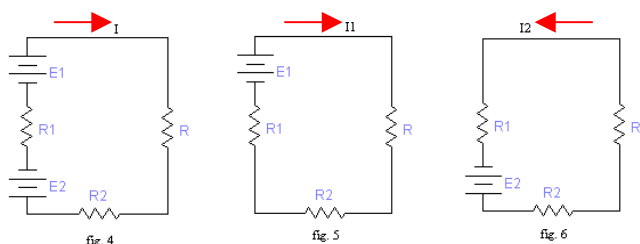


il segno con il quale bisogna prendere le f.e.m. bisogna prima fissare il verso della f.e.m. equivalente, fatto ciò bisogna prendere con segno positivo le f.e.m. concordi e negativo quelle discordi, ad esempio fissato come verso quello del generatore di fig.2 la f.e.m. equivalente al sistema di generatori illustrato in fig.3 è

$$e_{eq} = -e_1 + e_2 + e_3 - e_4 + e_5$$

per quanto riguarda la connessione in parallelo di generatori di tensione come è stato già detto bisogna applicare il teorema di Millman.

E' interessante vedere adesso cosa succede combinando generatori di tensione e di corrente, per far ciò è necessario prima introdurre il principio di sovrapposizione degli effetti, che dice: l'effetto risultante dell'azione simultanea di più cause è lo stesso che si avrebbe se ogni causa agisse separatamente, tale principio è valido solo per sistemi lineari. Vediamo di applicarlo al circuito di fig.4, innanzitutto è possibile

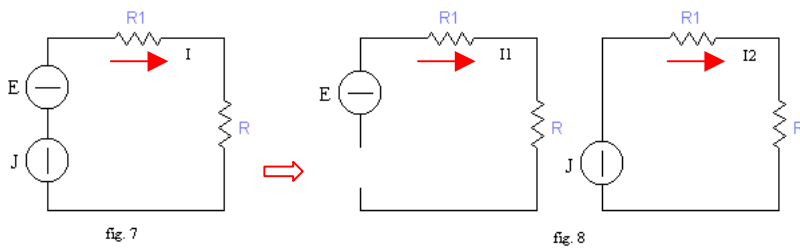


osservare che le cause sono rappresentate dai generatori, e l'effetto risultante è la corrente. Per far agire una singola causa bisogna passivare le altre, cioè bisogna far in modo che non contribuiscano all'effetto risultante, ricordando la caratteristica esterna di

un generatore di tensione ideale è evidente che l'unico modo di far ciò sia quello di sostituire il generatore con un c.c. (corto circuito), con lo stesso ragionamento si può concludere che per passivare un generatore di corrente ideale sia necessario sostituirlo con un circuito aperto. In generale nel passivare una rete bisogna sostituire i generatori ideali di tensione con un c.c., quelli reali con la relativa resistenza interna, i generatori ideali di corrente con un circuito aperto, vedremo in seguito cosa altro bisogna fare per passivare una rete. Detto questo dovrebbe essere ormai chiaro che nei circuiti di fig.5 e 6 agiscono le due cause ognuna separatamente dall'altra, e per il principio di sovrapposizione degli effetti si ha $I = I_1 - I_2$, la seconda corrente è stata presa con segno negativo in quanto come è possibile notare dalla figura ha verso opposto a quello della I , pertanto anche in questo caso bisogna prestare attenzione ai segni con cui vengono prese le correnti. Vogliamo adesso far vedere che questo principio è valido soltanto per sistemi lineari, per far ciò proviamo ad applicarlo nel calcolo della potenza dissipata sulle resistenze nel circuito di fig.4, per la legge di Joule $P = (R + R_1 + R_2)I^2$, $P_1 = (R + R_1 + R_2)I_1^2$, $P_2 = (R + R_1 + R_2)I_2^2$ se per assurdo fosse valido il principio dovremmo riuscire a far vedere che la P è data dalla somma delle potenze relative ai circuiti di fig.5 e 6, cioè $P = P_1 + P_2$, sostituendo le relazioni scritte per le potenze e con qualche semplificazione si conclude che dovrebbe essere $I^2 = I_1^2 + I_2^2$ ma essendo $I = I_1 - I_2$ questo non è possibile.

Adesso è possibile analizzare gli effetti della combinazione tra generatori di tensione e di corrente. Per esempio vogliamo vedere cosa succede se un generatore di tensione viene connesso in serie ad un generatore di corrente come illustrato in fig.7, ricordando le regole date per passivare i generatori è immediato capire che facendo

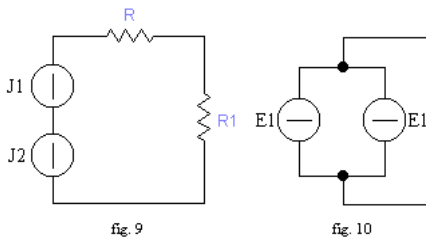
agire le cause separatamente si ottengono le configurazioni di fig.8. Per il principio di



sovrapposizione degli effetti la corrente I è data dalla somma di I_1 e I_2 , ma come è immediato capire dalla figura $I_1 = 0$ e $I_2 = I$, la conclusione importante cui siamo giunti consiste nell'osservazione che

quando in una maglia è presente un generatore di corrente, la corrente è imposta da esso. Il risultato opposto si ottiene connettendo in parallelo un generatore di corrente con uno di tensione, infatti con lo stesso ragionamento è possibile concludere che la corrente è imposta dal generatore di tensione, in altre parole è la corrente che circolerebbe nel circuito se al posto del parallelo tra i due generatori ci fosse soltanto il generatore di tensione.

Vediamo adesso che il principio di sovrapposizione degli effetti porta a conclusioni anomale in alcuni casi particolari. Supponiamo di voler trovare la corrente che circola

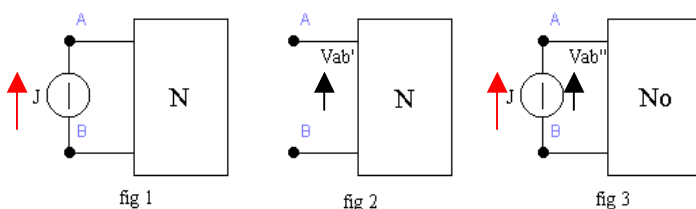


nel circuito di fig.9, come è possibile notare si hanno due generatori di corrente in serie, ma per quello detto per passivare un generatore di corrente è necessario sostituirlo con un circuito aperto, questo porta alla conclusione che la corrente che dovrebbe circolare nel circuito, è nulla. Per quanto riguarda la situazione che si ha in fig.10 ovvero il parallelo tra due generatori di

tensione ideali si arriva ad un'altra conclusione assurda, ovvero che la d.d.p ai morsetti del parallelo, non è nulla. Questo può essere giustificato in entrambi i casi dal fatto che è stata formulata l'ipotesi di generatori ideali, è ben noto che in realtà non esistono generatori la cui resistenza interna è nulla, infatti se si suppone che i generatori siano reali come già detto per passivarli è necessario sostituirli con la relativa resistenza interna, e in tal caso come è possibile verificare si arriva a conclusioni del tutto ragionevoli.

Principio e teorema di Thevenin

Il principio del generatore equivalente di Thevenin è utile per lo studio degli effetti che una rete N lineare, tempo invariante e comunque complessa provoca su un qualunque bipolo (non viene fatta alcuna ipotesi sul bipolo), è necessario inoltre che



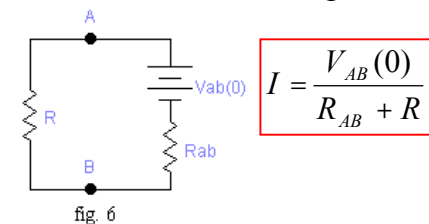
la rete ammetta un'unica soluzione sia se aperta che chiusa su un qualunque bipolo, questo significa che la rete deve rispondere a qualunque "sollecitazione" in modo unico. Supponiamo che il bipolo a

cui è connessa la rete sia un generatore di corrente come è possibile notare in fig.1, pertanto l'obiettivo è quello di trovare la tensione sul generatore. Per far questo è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti, pertanto bisogna far agire separatamente le cause, in fig.2 è stato passivato il generatore e quindi agisce la rete, in fig.3 viceversa è stata passivata la rete e quindi agisce il generatore, ricordiamo che per passivare una rete è necessario sostituire i generatori di tensione con un c.c., aprire i generatori di corrente, non toccare quelli controllati e porre le condizioni iniziali a 0. Pertanto essendo N_0 la rete passivata, i bipoli che la compongono sono solo resistenze, inoltre è possibile osservare che la sua resistenza equivalente è data dal rapporto tra un'ipotetica tensione applicata ai suoi morsetti e la corrente che circola in essa. Per il circuito di fig.2. si ha $V_{AB}'' = R_{AB} J$ essendo per il principio di sovrapposizione degli effetti $V_{AB} = V_{AB}' + V_{AB}''$ e indicando V_{AB}' con $V_{AB}(0)$ in quanto tensione a vuoto, si ottiene

$$V_{AB} = V_{AB}(0) + R_{AB} J$$

questa equazione non è altro che la legge di Ohm generalizzata applicata al circuito di fig.4. Questo significa che la rete N è equivalente al sistema di fig.5, cioè è equivalente ad un generatore di tensione la cui f.e.m. è pari alla tensione a vuoto misurata ai morsetti della rete stessa una volta staccato il carico, e la cui resistenza interna è pari alla resistenza vista ai morsetti della rete stessa dopo averla passivata.

Questo non è altro che il principio del generatore equivalente di Thevenin. Riconsideriamo la fig.1 sostituendo il generatore di corrente con una resistenza R , applicando il principio del generatore equivalente di Thevenin si può concludere che il sistema descritto equivale al sistema di fig.6, per il quale la corrente vale

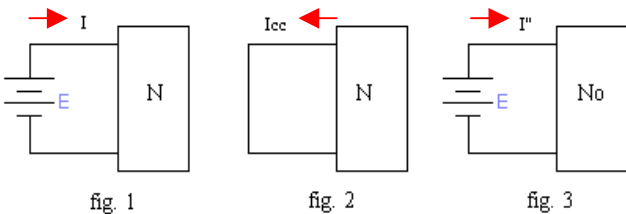


$$I = \frac{V_{AB}(0)}{R_{AB} + R}$$

questo è il teorema di Thevenin, il quale pertanto dice che la corrente in un ramo è data dal rapporto tra la tensione a vuoto, e la somma della resistenza vista ai morsetti del taglio una volta passivata la rete con la resistenza del ramo in questione.

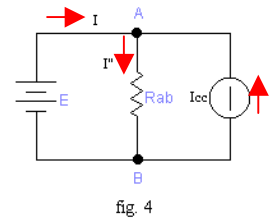
Principio e teorema di Norton

Supponiamo adesso che al posto del generatore di corrente ci sia un generatore di tensione come in fig.1, anche in questo caso è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti, ricordando che per passivare un generatore di tensione occorre sostituirlo con un c.c., è immediato capire che nei circuiti di fig.2

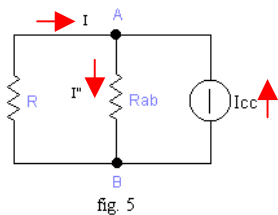


e 3 agiscono separatamente le cause, in particolare nella 2 la rete e nella 3 il generatore. Tenendo conto che

$$I'' = \frac{E}{R_{AB}} \quad \text{si ottiene} \quad I = -I_{CC} + \frac{E}{R_{AB}} \quad \text{ma questa non è altro che}$$



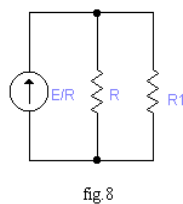
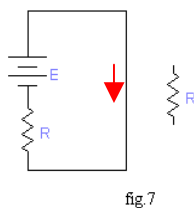
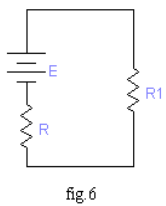
l'equazione al nodo A relativo al circuito rappresentato in fig.4. Da ciò ne segue che la rete N di fig.1 è equivalente ad un generatore di corrente la cui corrente è quella di c.c. e la cui resistenza interna è quella vista ai morsetti della rete stessa una volta passivata. Questo è il principio Norton, in questo caso se il generatore di tensione di fig.1 viene sostituito con una resistenza R, applicando il principio di Norton si ottiene il circuito di fig.5, dal quale applicando la regola del partitore di corrente si ottiene



$$I = -I_{CC} \frac{R_{AB}}{R_{AB} + R}$$

questo rappresenta il teorema di Norton.

Vogliamo vedere adesso com'è possibile con i principi visti trasformare un generatore di tensione in un generatore di corrente e viceversa. A tal proposito consideriamo il



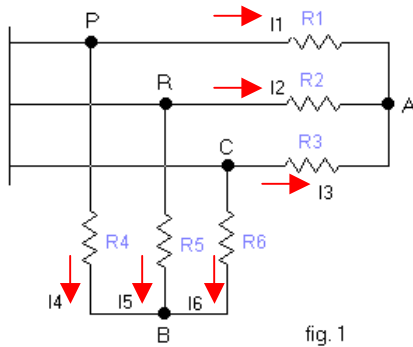
circuito di fig.6, per il principio del generatore equivalente di Norton il generatore di tensione e la relativa resistenza in serie possono essere sostituiti da un generatore di corrente con in parallelo una resistenza, tale

generatore deve erogare una corrente pari alla corrente che fluirebbe se la R1 venisse sostituita con un c.c., e la resistenza deve essere pari alla resistenza vista ai morsetti del taglio una volta passivata la rete. Come è immediato notare dalla fig.7, la corrente di c.c. è data dal rapporto tra la f.e.m. del generatore e la R, e la resistenza vista ai morsetti del taglio una volta passivata la rete non è altro che la R. In conclusione si ottiene il circuito di fig.8 nel quale non ci sono generatori di tensione.

Viceversa dato il circuito di fig.8 sarebbe possibile trasformarlo in quello di fig.6 mediante il teorema di Thevenin, pertanto se il generatore di c. erogasse la corrente J, il generatore di t. erogherebbe la tensione JR.

Esercizi quaderno.

Ancora sul collegamento stella-triangolo



Date le due stelle di fig.1 è possibile semplificare il circuito trasformando le stelle in triangoli, come visto precedentemente, e ridurre le resistenze che risultano in tale condizione connesse in parallelo ad un'unica resistenza, fatto questo è possibile verificare che il circuito che si ottiene è costituito da tre sole resistenze connesse a triangolo. Vogliamo però vedere che esiste una condizione che ci permette di semplificare il circuito senza dover fare quanto detto sopra. La

condizione è che la d.d.p. tra A e B sia nulla, infatti, in tale situazione la resistenza R1 risulta in parallelo alla R4, la R2 alla R5 e la R3 alla R6, pertanto è possibile ridurre il circuito formato dalle due stelle ad un'unica stella. E' necessario distinguere tre casi e vedere di volta in volta quali sono le condizioni che ci garantiscono una d.d.p. tra A e B nulla, prima di tutto calcoliamo la V_{AB} in tre modi diversi:

$$1) V_{AB} = -R_1 I_1 + R_4 I_4 \qquad 2) V_{AB} = -R_2 I_2 + R_5 I_5 \qquad 3) V_{AB} = -R_3 I_3 + R_6 I_6$$

sommando le tre equazioni ottenute membro a membro si ottiene

$$4) 3V_{AB} = -(R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3) + (R_4 I_4 + R_5 I_5 + R_6 I_6)$$

supponiamo adesso che le stelle siano:

Uguali ed equilibrate, ovvero che le sei resistenze siano uguali, in questo caso la 4 diventa $3V_{AB} = -R(I_1 + I_2 + I_3) + R(I_4 + I_5 + I_6)$ essendo per la prima legge di Kirchhoff

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ I_4 + I_5 + I_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3V_{AB} = 0 \Rightarrow V_{AB} = 0 \qquad \text{pertanto è possibile}$$

concludere che nel caso in cui le stelle sono uguali ed equilibrate la condizione è sempre verificata e pertanto è possibile procedere come detto sopra.

Equilibrate, ovvero che le resistenze componenti una singola stella siano uguali, in questo caso la 4 diventa $3V_{AB} = -R'(I_1 + I_2 + I_3) + R''(I_4 + I_5 + I_6)$ anche in questo caso è possibile concludere che la condizione è sempre verificata per gli stessi motivi visti sopra.

Squilibrate, questo è il caso più generale poiché siamo nell'ipotesi che le sei resistenze siano tutte diverse, dividendo la 1 per R1 la 2 per R2 e la 3 per R3 si ottiene

$$\frac{V_{AB}}{R_1} = -I_1 + \frac{R_4}{R_1} I_4 \qquad \frac{V_{AB}}{R_2} = -I_2 + \frac{R_5}{R_2} I_5 \qquad \frac{V_{AB}}{R_3} = -I_3 + \frac{R_6}{R_3} I_6$$

sommando si ha $V_{AB} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = -(I_1 + I_2 + I_3) + \left(\frac{R_4}{R_1} I_4 + \frac{R_5}{R_2} I_5 + \frac{R_6}{R_3} I_6 \right)$ per la

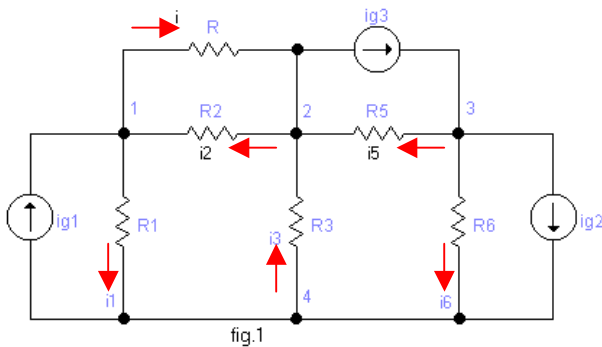
prima legge di Kirchhoff affinché sia $V_{AB} = 0$ è necessario che $\frac{R_4}{R_1} = \frac{R_5}{R_2} = \frac{R_6}{R_3}$ questa

rappresenta pertanto la condizione affinché, nel caso di stelle squilibrate, sia possibile ridurre le due stelle di fig.1 ad una sola stella come descritto precedentemente.

Affinché tutto quello detto sia valido, è comunque necessario che tra A e B non vi sia interposto alcun generatore di tensione o di corrente.

Metodi sistematici

Per risolvere i circuiti esistono altri due metodi chiamati metodi sistematici, questi sono, il metodo del potenziale ai nodi e quello delle correnti alle maglie. Cominciamo con il primo. Consideriamo il circuito di fig.1, applichiamo la legge di Kirchhoff ai nodi 1, 2 e 3:



- 1) $ig_1 = i + i_1 - i_2$
- 2) $ig_2 = i - i_2 + i_3 + i_5$
- 3) $ig_3 - ig_2 = i_6 + i_5$

per la legge di Ohm si ha $i_1 = \frac{V_{14}}{R_1}$, $i_2 = \frac{V_{21}}{R_2}$, $i_3 = \frac{V_{42}}{R_3}$, $i_5 = \frac{V_{32}}{R_5}$, $i_6 = \frac{V_{34}}{R_6}$, $i = \frac{V_{12}}{R}$

scegliamo adesso un potenziale di riferimento, per esempio quello del nodo 4, pertanto fatta tale scelta è possibile riferire il potenziale dei nodi rimanenti a quello scelto. Esprimiamo le d.d.p. mediante i potenziali dei nodi, tenendo conto che $e_4 = 0$ essendo e_4 stesso il potenziale di riferimento:

$$V_{12} = e_1 - e_2 \quad V_{14} = e_1 - e_4 = e_1 \quad V_{21} = e_2 - e_1 \quad V_{42} = -e_3 \quad V_{32} = e_3 - e_2 \quad V_{34} = e_3$$

operando le sostituzioni nelle espressioni ricavate sopra per il calcolo delle correnti si ottiene

$$i_1 = \frac{e_1}{R_1} \quad i_2 = \frac{e_2}{R_2} - \frac{e_1}{R_2} \quad i_3 = -\frac{e_3}{R_3} \quad i_5 = \frac{e_3}{R_5} - \frac{e_2}{R_5} \quad i_6 = \frac{e_3}{R_6} \quad i = \frac{e_1}{R} - \frac{e_2}{R}$$

sostituendo i risultati ottenuti nelle equazioni ai nodi, con qualche semplice passaggio è possibile ottenere le seguenti equazioni:

$$1) \quad ig_1 = e_1 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + e_2 \left[- \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} \right) \right]$$

$$2) \quad -ig_3 = e_1 \left[-\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} \right) \right] + e_2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \right) + e_3 \left(-\frac{1}{R_5} \right)$$

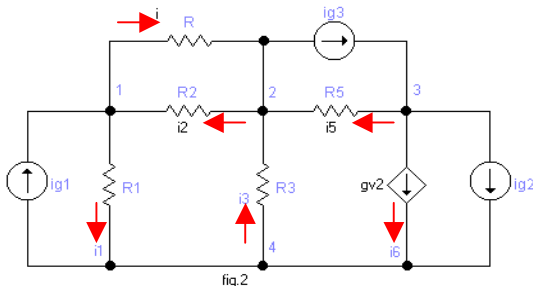
$$3) \quad ig_3 - ig_2 = e_2 \left(-\frac{1}{R_5} \right) + e_3 \left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right)$$

è possibile pensare di associare alle tre equazioni ottenute una forma matriciale del tipo

$$\begin{pmatrix} ig_1 \\ -ig_3 \\ ig_3 - ig_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} \right) & 0 \\ -\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} \right) & \frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_5} \\ 0 & -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

matrice delle conduttanze

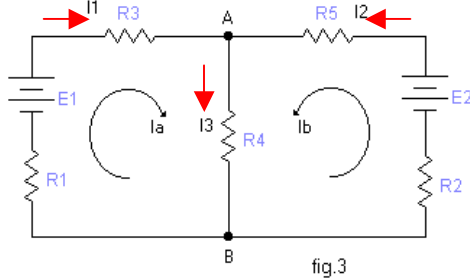
cerchiamo di interpretare il significato della matrice delle conduttanze, innanzitutto la cosa che è necessario tenere presente, è che ad ogni riga corrisponde un nodo, una prima cosa da notare è che i termini a_{ij} con $i = j$, ovvero i termini della diagonale principale, non sono altro che la somma delle conduttanze che insistono al nodo j -esimo, mentre i termini a_{ij} con $i \neq j$ sono la somma cambiata di segno delle conduttanze che collegano direttamente il nodo i al nodo j . La conferma di quanto detto è data dal fatto che la matrice delle conduttanze è una matrice simmetrica, se consideriamo ad esempio il termine a_{13} per quello detto dovremmo aspettarci che questo sia la somma cambiata di segno delle conduttanze che collegano il nodo 1 al 3, e pertanto essendo il nodo 1 non direttamente connesso al 3 il risultato ottenuto è in accordo con le aspettative. E' possibile inoltre osservare che i termini del primo vettore colonna non sono altro che le correnti dei generatori indipendenti di corrente che insistono direttamente al relativo nodo, prese con segno positivi se entranti nel nodo, negativo altrimenti. E' comunque possibile applicare tale metodo anche a circuiti nei quali sono presenti generatori di tensione, semplicemente trasformandoli in generatori di corrente come visto in precedenza.



Non è invece possibile o per meglio dire è sconsigliato, applicare metodi sistematici nel caso in cui sono presenti nel circuito generatori di corrente controllati, questo è il caso del circuito di fig.2 nel quale è presente un generatore di corrente controllato in tensione. In questi casi si procede scrivendo le equazioni ai nodi sui quali insiste il generatore

controllato, pertanto in questo caso si ha $ig_3 - ig_2 - gv_2 = i_5 \Rightarrow ig_3 - ig_2 - ge_2 + ge_1 = e_3 G_5 - e_2 G_5 \Rightarrow ig_3 - ig_2 = e_1(-g) + e_2(g - G_5) + e_3 G_5$ pertanto basta sostituire alla terza riga della matrice delle conduttanze $-g \quad g - G_5 \quad G_5$.

Per quanto riguarda il secondo dei metodi sistematici, ovvero il metodo delle correnti alle maglie, consideriamo il circuito di fig.3. Si procede supponendo che in ogni maglia del circuito circoli una corrente fittizia, nel caso in esame sono state fissate le correnti I_a ed I_b . Fatto ciò è possibile applicare la seconda legge di Kirchhoff ad ognuna delle maglie, ottenendo:



$$\begin{cases} E_1 = (R_1 + R_3)I_a + R_4(I_a + I_b) \\ E_2 = (R_2 + R_5)I_b + R_4(I_a + I_b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = (R_1 + R_3 + R_4)I_a + R_4I_b \\ E_2 = R_4I_a + (R_2 + R_4 + R_5)I_b \end{cases}$$

anche in questo caso è possibile scrivere le equazioni ottenute in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 + R_4 & R_4 \\ R_4 & R_1 + R_3 + R_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix}$$

questa volta è possibile osservare che i

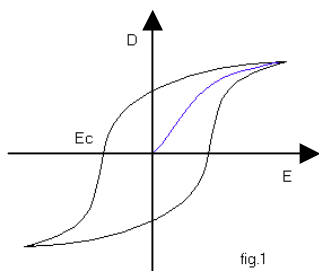
termini sulla diagonale principale, ovvero i termini a_{ij} con $i = j$, sono la somma delle resistenze relative alla maglia i , mentre i termini a_{ij} con $i \neq j$ sono la somma delle resistenze in comune alla maglia i e j presa con segno positivo se le correnti di maglia sono concordi, negativo altrimenti. Anche in questo caso la matrice è simmetrica purché nel circuito non siano presenti generatori controllati.

Campo elettrico e condensatori

Ricordiamo che dato un campo elettrico E , si definisce induzione elettrica la quantità $D = \varepsilon E$, dove ε rappresenta la costante dielettrica assoluta del materiale, ed è legata alla costante dielettrica del vuoto mediante la relazione $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$. Una conseguenza di quanto detto è che il campo d'induzione elettrica, a differenza del campo elettrico, dipende dal materiale che si sta considerando, inoltre è possibile scrivere la legge di Gauss in due modi differenti, infatti si ha:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} ds = \frac{q}{\varepsilon} \Rightarrow \oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} ds = q$$

E' da precisare comunque che il legame tra D ed E non è sempre lineare, in realtà al variare del campo elettrico, D descrive il ciclo di fig.1, dove E_c prende il nome di campo coercitivo, e rappresenta il valore che è necessario il campo elettrico abbia affinché sia $D = 0$.

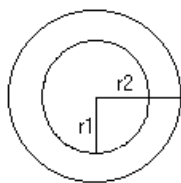
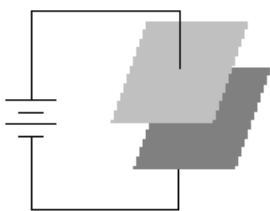


Un condensatore è un qualunque sistema costituito da due conduttori affacciati tra i quali è posto un materiale isolante, i due conduttori prendono il nome di armature, mentre il

materiale isolante viene comunemente chiamato dielettrico e le sue funzioni sono principalmente due, la prima è di evitare che si verifichino scariche tra i due conduttori in seguito all'applicazione di una d.d.p. tra le armature, la seconda è quella come vedremo di aumentare a parità di dimensioni la capacità di questo tipo di dispositivi. Il simbolo circuitale del condensatore è quello di fig.2. Vediamo adesso di capire cosa s'intende per capacità, consideriamo a tal proposito la fig.3. La conseguenza dell'applicazione di una d.d.p. ai morsetti del condensatore è principalmente l'accumulo di carica sulle sue armature, ovviamente se il sistema è inizialmente neutro (carica netta nulla) dovrà continuare ad esserlo, questo significa che si ha un semplice trasferimento di carica da un'armatura all'altra e non come si potrebbe assurdamente pensare una generazione di carica. La funzione del generatore è proprio quella di fornire il lavoro necessario affinché questo processo possa avvenire, tuttavia in seguito a questo avvenimento si stabilisce un campo elettrico tra le armature del dispositivo che potrebbe assumere valori così intensi da provocare una scarica distruttiva tra le armature danneggiando il dielettrico, il valore del campo per il quale ciò si verifica dipende dalla rigidità dielettrica del materiale che rappresenta l'attitudine del dielettrico a resistere al campo elettrico stesso, tale quantità è quindi misurata in V/m. Ad un certo punto verrà raggiunta una condizione di equilibrio, in altre parole il trasferimento di carica da un'armatura all'altra si arresta. Per carica accumulata da un condensatore s'intende quindi il valore assoluto della carica su una delle due armature, ovviamente da quanto detto si capisce che questa dipende dalla d.d.p. applicata, questa dipendenza è lineare e si definisce capacità proprio il coefficiente che lega la d.d.p. alla carica, pertanto vale la relazione

$$C = \frac{q}{V}$$

. Vedremo adesso che mediante la legge di Gauss e la definizione di d.d.p. è



possibile determinare la capacità dei condensatori comunemente usati, inoltre verrà fuori che la capacità dipende esclusivamente dalle caratteristiche geometriche del condensatore ed eventualmente dal tipo di materiale usato come dielettrico. Consideriamo ad esempio il condensatore ad armature piane

poste ad una distanza l l'una dall'altra illustrato in fig. 4, scegliendo come superficie gaussiana un parallelepipedo contenente una delle armature, la legge di Gauss diventa

$$q = DS \Rightarrow E = \frac{q}{\epsilon S},$$

dove S non è altra che la superficie dell'armatura, ricordando la

definizione di d.d.p. e integrando lungo una linea di campo si ha $V = \int_0^l E dl = \int_0^l \frac{q}{\epsilon S} dl = \frac{ql}{\epsilon S}$

da cui sostituendo nella formula per il calcolo della capacità si ottiene $C = \frac{q\epsilon S}{ql} = \epsilon \frac{S}{l}$

Pertanto come avevamo accennato è possibile notare che la capacità dipende esclusivamente dalle caratteristiche geometriche e dal dielettrico, e ovvio pertanto

che per ottenere grosse capacità e piccoli ingombri conviene usare materiali con un'alta costante dielettrica relativa. E' possibile seguire lo stesso procedimento per determinare la capacità del condensatore ad armature sferiche la cui sezione è illustrata in fig.5. Questa volta è conveniente scegliere come superficie gaussiana una superficie concentrica alle armature, tale scelta è vantaggiosa in quanto ci permette di affermare che il campo elettrico lungo la superficie è costante ed inoltre ortogonale alla superficie stessa, dalla legge di Gauss si ottiene quindi $q = DS = 4\pi r^2 D \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}$, calcoliamo pertanto la d.d.p. integrando lungo una linea

di campo e pertanto lungo un raggio $V = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$

sostituendo questo risultato nella formula per il calcolo della capacità si ha

$$C = \frac{q 4\pi\epsilon}{q} \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} = 4\pi\epsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

Per il calcolo della capacità di un condensatore ad armature cilindriche si procede esattamente allo stesso modo, l'unica differenza sta nel fatto che la superficie gaussiana deve essere cilindrica e pertanto si avrà $S = 2\pi r h$ dove h è l'altezza.

Vediamo adesso di trovare la capacità che deve avere un condensatore affinché sia

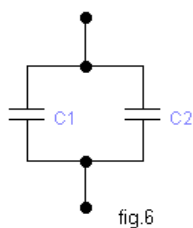


fig.6

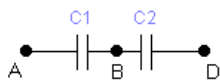


fig.7

equivalente a più condensatori connessi in parallelo o in serie. Consideriamo dapprima la connessione in parallelo pertanto facciamo riferimento alla fig.6, ricordando la definizione di sistema equivalente data in precedenza, risulta chiaro che a parità di d.d.p. applicata è necessario che la carica

accumulata dal condensatore equivalente sia pari alla carica accumulata dall'intero sistema, deve essere pertanto $Q = Q_1 + Q_2$, ma essendo $Q = C_{eq} V$ $Q_1 = C_1 V$ $Q_2 = C_2 V$ si ha $C_{eq} V = C_1 V + C_2 V \Rightarrow C_{eq} = C_1 + C_2$, siamo giunti quindi alla conclusione che la

capacità del condensatore equivalente a più condensatori connessi in parallelo è data dalla somma delle singole capacità. Consideriamo adesso la connessione in serie di più condensatori illustrate in fig.7, è possibile osservare che affinché sia verificata la conservazione della carica nel sistema isolato formato dalla seconda armatura del primo condensatore, dal conduttore, e dalla prima armatura del secondo condensatore, è necessario che la Q_1 sia uguale alla Q_2 , inoltre dovendo essere

$V_{AD} = V_{AB} + V_{BC}$ si ha $\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$ da cui segue che deve essere $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$, in altre

parole il reciproco della capacità equivalente è dato dalla somma dei reciproci delle singole capacità.

Ormai dovrebbe essere chiaro che la conseguenza dell'applicazione di una d.d.p. ai morsetti di un condensatore è un accumulo di carica. Non sappiamo però ancora descrivere il fenomeno nel tempo, né tanto meno possiamo aspettarci che avvenga istantaneamente perché come vedremo se così fosse sarebbe necessaria una potenza infinita. Per come è stata

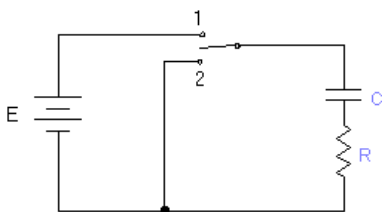
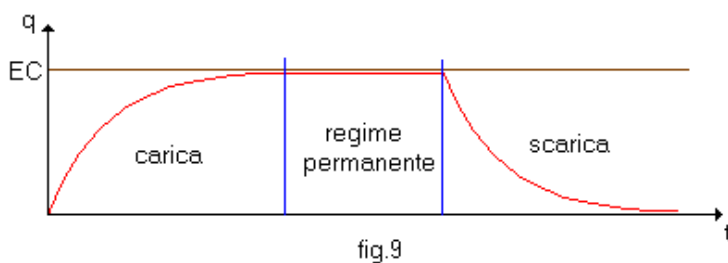


fig.8

definita la capacità sappiamo che $q = CV$ derivando ambo i membri si ottiene $i = C \frac{dV}{dt}$ (*). Consideriamo adesso che il commutatore di fig.8 si trovi nella posizione 1, in tale situazione l'equazione alla maglia è $E - V_C = Ri$, ma tenendo presente la * diventa $E - V_C = RC \frac{dV_C}{dt}$ questa è un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili che integrata porta al risultato $V_C = E - K e^{-\frac{t}{RC}}$, imponendo come condizione iniziale $V_C = 0$ si ottiene $V_C = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$, ponendo $RC = \tau$ si ha $V_C = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, infine moltiplicando primo e secondo membro per C si ottiene $q = EC(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ che rappresenta la legge di carica del condensato, derivando si ottiene la corrente $i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$. Come è possibile provare il condensatore può essere considerato praticamente carico dopo un tempo pari a quattro cinque volte τ . Consideriamo adesso che il commutatore si trovi in posizione 2, l'equazione alla maglia diventa $V_C = Ri$ e questa volta si ha $i = -C \frac{dV_C}{dt}$, pertanto l'equazione differenziale che si ottiene è $V_C = -RC \frac{dV_C}{dt}$, da cui imponendo come condizione iniziale $V_C = E$ (condensatore carico) si conclude che $V_C = E e^{-\frac{t}{\tau}}$ da cui segue $q = EC e^{-\frac{t}{RC}}$ questa rappresenta la legge di scarica.



Il comportamento di un condensatore nelle diverse situazioni possibili è pertanto descritto dal grafico di fig.9.

Riconsideriamo l'equazione alla maglia che avevamo ottenuto supponendo che il commutatore si trovasse nella posizione 1 $E - V_C = Ri$, moltiplichiamo primo e secondo membro per

idt ottenendo $Eidt = V_C idt + Ri^2 dt$ ricordando inoltre che $i = C \frac{dV_C}{dt}$ e integrando si

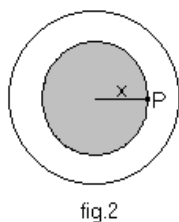
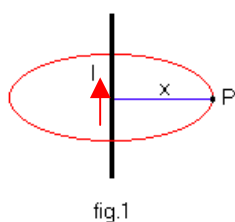
ottiene $\int Eidt = \frac{1}{2} CV_C^2 + \int Ri^2 dt$, il primo termine rappresenta l'energia erogata dal generatore, il secondo termine del secondo membro l'energia dissipata per effetto Joule, pertanto $W_C = \frac{1}{2} CV_C^2$ rappresenta l'energia immagazzinata nel condensatore.

Dal risultato ottenuto è possibile vedere che se fosse possibile caricare il condensatore istantaneamente, il che implicherebbe una variazione di tensione in un tempo nullo, si avrebbe una potenza infinita, infatti $P = \frac{dW_C}{dt}$. E' quindi possibile concludere che il condensatore è inerziale rispetto alla tensione proprio per questa sua

caratteristica di impedirne le brusche variazioni, il periodo di tempo che occorre ad un sistema per passare da uno stato energetico ad un altro prende il nome di transitorio.

Campo magnetico

Il campo magnetico è il mezzo matematico attraverso il quale si studiano gli effetti di una corrente nell'ambiente circostante, ed ha senso parlare di campo magnetico soltanto se si hanno cariche in movimento, per meglio dire esso è prodotto e rilevato soltanto da cariche in movimento e quindi da correnti. Consideriamo la fig.1, nella quale è rappresentato un conduttore percorso da corrente, per il calcolo dell'intensità



del campo magnetico H prodotto da tale corrente in un punto P distante x dal conduttore c'è d'aiuto la formula di Biot-Savart, la quale afferma che

$$H_P = \frac{I}{l} \text{ dove } l \text{ è la lunghezza della circonferenza}$$

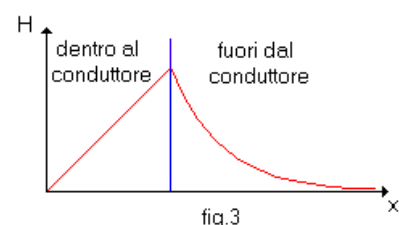
passante per P e di centro sul conduttore, si ha

$$\text{pertanto } H_P = \frac{I}{2\pi x} \text{ in altre parole l'intensità del}$$

campo decresce con un andamento iperbolico allontanandosi dal conduttore. La legge di Biot-Savart non ha validità generale ma solo nel caso in cui i conduttori sono rettilinei ed infinitamente lunghi, nei casi che incontreremo noi è comunque possibile applicarla senza correre il rischio di commettere grossi errori. Vogliamo trovare adesso l'intensità del campo in un punto interno al conduttore, a tal proposito facciamo riferimento alla fig.2, questa volta è necessario tenere conto del fatto che non tutta la corrente ha contribuito. Supponiamo che la corrente sia uniforme e quindi che la densità di corrente sia costante, detto ciò possiamo essere certi che $\frac{I'}{S'} = \frac{I}{S} \Rightarrow$

$$I' = \frac{I}{S} S' \text{ dove } S \text{ e } S' \text{ sono rispettivamente la sezione del conduttore e la superficie}$$

della circonferenza di centro sul conduttore e passante per P , si ha pertanto



$$I' = I \frac{\pi x^2}{\pi r^2} = I \frac{x^2}{r^2} \text{ dove } r \text{ è il raggio del conduttore, a questo}$$

punto è quindi possibile applicare la legge di Bio-

$$\text{Savart ottenendo } H' = \frac{I'}{2\pi x} = \frac{Ix^2}{2\pi r^2 x} = \frac{I}{2\pi r^2} x, \text{ in fig.3 è}$$

riportato l'andamento del campo dentro e fuori il conduttore, è possibile notare che il valore massimo si ha

in corrispondenza della superficie del conduttore stesso.

Supponiamo di avere due conduttori percorsi da correnti di stessa intensità e di stesso verso, supponiamo inoltre che i conduttori siano praticamente accavallati, in tali condizioni il campo magnetico in un punto distante x sarà dato dalla somma dei

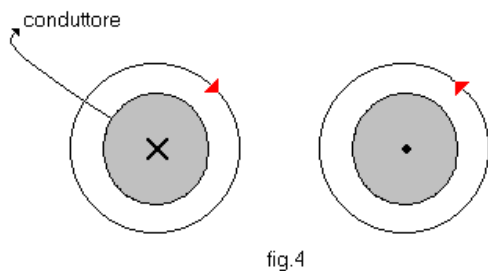


fig.4

campi cioè $H = \frac{2I}{2\pi x}$, nel caso generale di N

conduttori si ha $H = \frac{NI}{2\pi x}$, per analogia con il

campo elettrico il termine NI prende il nome di forza magneto motrice. Per quanto riguarda il verso del campo magnetico facciamo riferimento alla fig.4, premettendo che si usa mettere una

crocetta al centro del conduttore per indicare che la corrente è entrante un punto per indicare che è uscente, un modo semplice per ricordare questa convenzione può essere quello di immaginare che la corrente sia una freccia dello stesso tipo di quelle usate dai pellerossa nei film. Nel caso in cui la corrente è entrante il verso del campo magnetico è quello indicato in figura e per stabilirlo basta immaginare la freccia come una vite la cui testa coincide con la crocetta, lo stesso discorso può essere fatto nel caso in cui la corrente sia uscente la differenza sta nel fatto che “per avvitarla la vite” bisognerebbe girare il foglio, pertanto il verso è opposto. Dovrebbe essere noto

che l'effetto di un campo magnetico su una corrente è una forza, la cui intensità è data dalla relazione $F = BIl$ (a), dove l è la lunghezza del conduttore in esame, I la corrente che lo attraversa, e B il campo d'induzione magnetica a cui è sottoposto. La relazione che intercorre tra l'induzione e l'intensità è $B = \mu H$ dove μ rappresenta

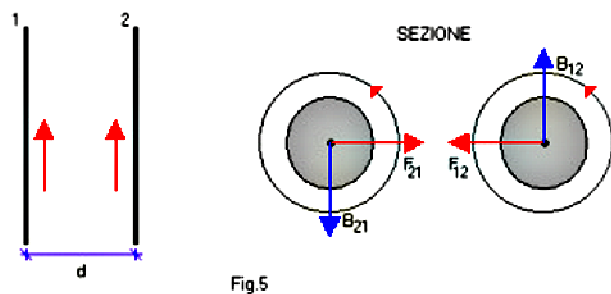


Fig.5

la permeabilità magnetica del mezzo, anche in questo caso, in analogia con la costante dielettrica, è possibile legare tale quantità con la permeabilità magnetica del vuoto mediante la relazione $\mu = \mu_r \mu_0$. Supponiamo di avere due conduttori posti ad una distanza d come illustrato in fig.5, supponiamo inoltre che siano attraversati da correnti diverse ma di stesso verso, vogliamo determinare le forze F_{12} ed F_{21} che sono rispettivamente la forza causata dal conduttore 1 sul 2 e la forza causata dal conduttore 2 sull'1. Ricordando la relazione (a) possiamo scrivere:

$$F_{12} = B_{12} l_2 I_2 \quad (1)$$

$$F_{21} = B_{21} l_1 I_1 \quad (2) \text{ ricordando inoltre il legame che c'è tra } B \text{ ed } H$$

e formula di Biot-Savart è possibile pervenire alla conclusione che $B_{12} = \mu \frac{I_1}{2\pi d}$, da cui sostituendo nella (1) si ottiene $F_{12} = \frac{\mu}{2\pi d} l_2 I_1 I_2$, con procedimento

analogo $F_{21} = \frac{\mu}{2\pi d} l_1 I_1 I_2$. Manca da determinare il verso di tali forze, a tal proposito esiste una regola chiamata “regola MoCA della mano sinistra” mediante la quale è possibile, conoscendo campo e corrente, determinare il verso della forza. Per capire come va applicata tale regola basta osservare la fig.6.

mano

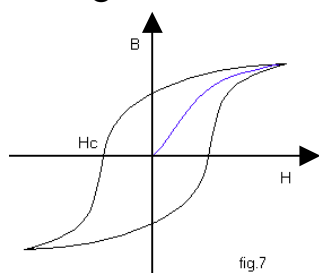


fig.7

Si supponga di avere un materiale che non sia mai stato magnetizzato, o che non conservi alcuna traccia delle eventuali

magnetizzazione antecedenti. Supponiamo inoltre di sottoporre tale materiale ad un campo di intensità H crescente, come è possibile notare dalla fig.7 inizialmente il campo d'induzione magnetica B nel materiale cresce linearmente, questo tratto si chiama curva di prima magnetizzazione. Ad un certo punto B comincia a crescere meno rapidamente (ginocchio) fino ad arrivare ad un valore massimo, cioè dopo un certo valore di H il campo d'induzione si mantiene praticamente costante, in questa situazione si dice che si ha la saturazione. A questo punto si osserva che diminuendo l'intensità del campo fino ad annullarla, B non segue più lo stesso andamento, quello che è possibile notare dalla figura è che per H nulla B è diverso da zero, il valore di B in tale situazione prende il nome di induzione residua del materiale. Facendo crescere il campo in verso opposto, si osserva che esiste un valore in corrispondenza del quale B si annulla, questo valore prende il nome di campo coercitivo, continuando a far diminuire H il campo d'induzione ha lo stesso comportamento di prima, cioè per valori di H grandi si ha la saturazione. L'andamento di B al variare di H rappresentato in figura prende il nome di ciclo d'isteresi, e l'area da esso delimitata rappresenta l'energia immagazzinata per unità di volume e di ciclo.

Circuiti magnetici e bipolo induttivo

Analogamente a quanto avviene per i circuiti elettrici la conseguenza dell'applicazione di una forza magneto motrice NI , la cui unità di misura è As (Ampere Spire), ad un circuito magnetico come quello mostrato in fig.1, è la

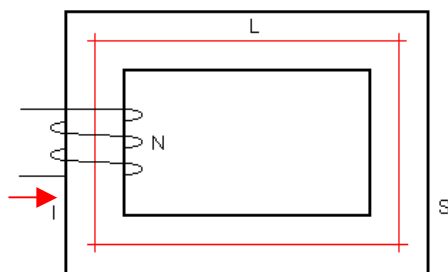


fig.1

circolazione di un flusso magnetico. Come vedremo il flusso che circola all'interno del circuito dipende come già detto dalla forza magneto motrice e dalla riluttanza del circuito. I materiali usati per questo tipo di circuiti sono ferromagnetici, e la riluttanza è legata al tipo di materiale tramite la relazione $\mathfrak{R} = \frac{L}{\mu S}$, dove

L è la lunghezza media del nucleo, μ è la permeabilità magnetica assoluta del materiale usato,

S è la sezione del nucleo. L'equivalente della legge di Ohm è la legge di Hopkinson $NI = \mathfrak{R}\phi$ la quale lega tra loro f.m.m., riluttanza e flusso. E' quindi possibile fare analogie tra circuiti magnetici ed elettrici come suggerito dalla seguente tabella

Circuiti elettrici	I	f.e.m.	R	$V = RI$
Circuiti magnetici	ϕ	f.m.m.	\mathfrak{R}	$NI = \mathfrak{R}\phi$

Dalla legge di Hopkinson segue che $\phi_g = \frac{NI}{\mathfrak{R}}$, questo rappresenta il flusso generato, cioè il flusso che circola all'interno del nucleo. Si definisce flusso concatenato il flusso che si concatena con tutte le N spire dell'avvolgimento pertanto si ha $\phi_\Sigma = N\phi_g$. Se avviene una variazione di flusso per la legge di Lenz l'avvolgimento reagisce

tendendo ad opporsi alla variazione, cioè cercando di mantenere il flusso totalmente concatenato costante, l'unico modo di far questo è quello di generare un altro flusso in opposizione o in sostegno, per meglio dire se la causa è una diminuzione di flusso sarà in sostegno, se è un aumento sarà in opposizione. Ma per generare un flusso occorre una corrente, e per generare una corrente occorre una f.e.m., pertanto siamo arrivati alla conclusione che ad una variazione di flusso corrisponde la nascita di una f.e.m. nell'avvolgimento che prende il nome di f.e.m. indotta di autoinduzione. Il

valore della f.e.m.i. è dato dalla seguente relazione $e = \frac{d\phi_{\Sigma}}{dt}$. Si definisce coefficiente di autoinduzione il rapporto tra il flusso totalmente concatenato e la corrente che lo genera $L = \frac{\phi_{\Sigma}}{i}$, questa quantità prende anche il nome di



fig.2

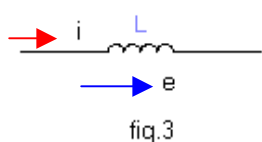


fig.3

legge di Hopkinson $\phi_g = \frac{Ni}{\mathfrak{R}}$ da cui segue che $\phi_{\Sigma} = \frac{N^2 i}{\mathfrak{R}}$, si ha pertanto $L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}}$. Per come è stata definita L si ha $\phi_{\Sigma} = Li$ da cui

$e = \frac{d\phi_{\Sigma}}{dt} = L \frac{di}{dt}$ (1). Vediamo di stabilire adesso il verso della f.e.m.i. di autoinduzione,

supponiamo che l'induttanza sia attraversata da corrente nel verso indicato in fig.3, per e fissiamo lo stesso verso della corrente, immaginiamo adesso che la corrente stia crescendo, in tale situazione per la (1) la f.e.m.i. ha lo stesso verso della corrente e pertanto il verso scelto per e è sbagliato. A questo punto potremmo decidere di cambiare il verso di e o di aggiungere un segno meno alla (1) con la convenzione che la tensione in un'induttanza sia presa con segno positivo se concorde con il verso della corrente negativo altrimenti. Pertanto ripetiamo ancora che diremo d'ora in poi che in un'induttanza si ha $e = -L \frac{di}{dt}$ con la convenzione che e sia presa con segno positivo se concorde alla corrente negativo altrimenti.

E' possibile distinguere tra f.e.m.i. di autoinduzione di tipo trasformatore e mozionale, quella vista è di tipo trasformatore, abbiamo detto che la causa della nascita di una f.e.m.i. è una variazione del flusso totalmente concatenato, perché si verifichi questo non è necessario che vari la corrente, infatti è possibile avere una variazione di flusso totalmente concatenato per altri motivi, si consideri per esempio

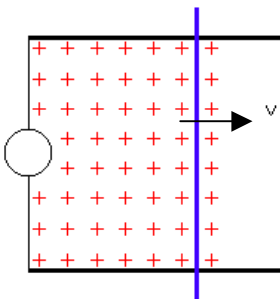


fig.4

una sbarra conduttrice che si muove su due binari conduttori come mostrato in fig.4, durante l'avanzamento della sbarra il flusso che si concatena con la spira formata dalla stessa sbarra e dai binari varia, dando luogo alla nascita di una f.e.m.i. che tende a far circolare una corrente di verso tale che la forza agente sulla sbarra a causa della presenza del campo, sia opposta alla velocità. Un altro esempio di f.e.m.i. di tipo mozionale si ha in fig.5 dove è rappresentato un anello in rotazione

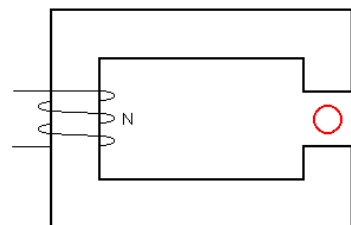
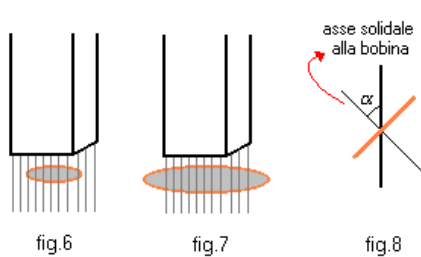


fig.5

posto in una regione nella quale è presente un campo magnetico, vedremo che questo è proprio il principio mediante il quale è possibile produrre la cosiddetta corrente alternata. E' importante notare che il circuito magnetico di fig.5 anche se apparentemente potrebbe sembrare aperto non lo è, questo grazie al fatto che anche l'aria è un conduttore magnetico.

Supponiamo adesso che l'anello di fig.5 sia una bobina, ovvero un avvolgimento costituito da N spire. Se come mostrato in fig.6 la sezione della bobina è inferiore a quella del polo, tutto il flusso uscente dal polo interessa bobina, si ha quindi $\phi_b = \phi_p$.

Ma se la sezione della bobina è maggiore di quella del polo come mostrato in fig.7 i due flussi non coincidono, ma nell'ipotesi di densità di flusso costante è comunque



possibile ricavare ϕ_b , infatti in tale situazione si ha

$$\frac{\phi_p}{S_p} = \frac{\phi_b}{S_b} \Rightarrow \phi_b = \phi_p \frac{S_b}{S_p}$$

Vogliamo adesso vedere come varia il flusso concatenato con la bobina durante la rotazione, supponiamo per semplicità di essere nella situazione di fig.6, facendo riferimento alla fig.8

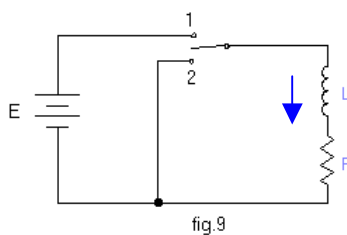
quello che possiamo osservare con facilità è che per $\alpha = 0$ il flusso concatenato con la bobina coincide con il flusso uscente dal polo, mentre per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ il flusso è nullo, la

funzione trigonometrica che ha queste caratteristiche è il coseno, è pertanto possibile dire che $\phi_b = \phi_p \cos \alpha$, se ω è la velocità angolare della bobina si ha $\alpha = \omega t$, da cui sostituendo si ottiene $\phi_b = \phi_p \cos \omega t$, a questo punto ricordando che per ottenere il flusso totalmente concatenato bisogna moltiplicare per il numero di spire si ha $\phi_{\Sigma b} = N \phi_p \cos \omega t$, con il risultato ottenuto risulta semplice il calcolo della f.e.m.i. sulla

bobina $e_b = \frac{d\phi_{\Sigma b}}{dt} = -N\omega\phi_p \sin \omega t$. Nell'esempio appena visto la f.e.m.i. è di tipo

mozionale, ma se la bobina fosse ferma e la corrente che produce il flusso ϕ_p variasse nel tempo con una legge sinusoidale, otterremmo esattamente lo stesso risultato, con la differenza sostanziale che questa la f.e.m.i. sarebbe di tipo trasformatorico.

Come è stato fatto per il condensatore, anche per l'induttore vogliamo ricavare la legge che regola l'andamento della corrente nel tempo, e l'energia immagazzinata. Vedremo anche che mentre il condensatore è un bipolo inerziale rispetto alla



tensione, l'induttore è inerziale rispetto alla corrente.

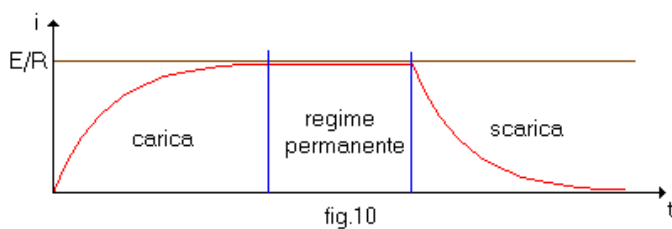
Consideriamo il circuito di fig.9, supponiamo che l'interruttore si trovi nella posizione uno e scriviamo

$$E + e_L = Ri \Rightarrow E - L \frac{di}{dt} = Ri$$

questa è un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili, considerando come condizione iniziale $i(0) = 0$ e

integrando si ottiene il risultato $i = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ dove si è posto $\tau = \frac{L}{R}$, pertanto si ha che

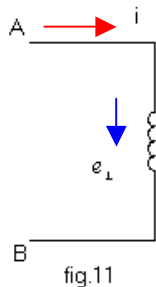
la corrente tende esponenzialmente al valore $\frac{E}{R}$. Supponiamo di portare l'interruttore



in posizione due nell'ipotesi che la corrente abbia il valore massimo (induttore carico), in tale situazione l'equazione alla maglia è $e_L = Ri$ da

cui segue $L \frac{di}{dt} = Ri \Rightarrow i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$

ovviamente questa soluzione è stata ricavata ponendo come condizione iniziale $i(0) = \frac{E}{R}$. Quanto detto è riassunto dal grafico di fig.10. La cosa importante che è possibile osservare è che a regime è come se l'induttore non ci fosse e la tensione cade tutta sulla resistenza, pertanto l'induttore in tale situazione si comporta come un corto circuito a differenza del condensatore che a regime si comporta come un circuito aperto.



Consideriamo la fig.11, è possibile affermare che la potenza che transita verso l'induttore è $P = V_{AB}i$ essendo $V_{AB} = L \frac{di}{dt}$ segue

sostituendo che $P = Li \frac{di}{dt}$ (*) ricordando che l'energia si ottiene moltiplicando la potenza per il tempo si ottiene $d\varepsilon = Pdt = Lidi$ da cui integrando $\varepsilon = \frac{1}{2} Li^2$. Dal risultato ottenuto è quindi possibile notare che

l'induttore è inerziale rispetto alla corrente, cioè tende ad opporsi a brusche variazioni, infatti se potesse avvenire una variazione istantanea di corrente per la (*) sarebbe necessaria una potenza infinita. Pertanto se un circuito subisce un transitorio e in esso ci sono condensatori devo aspettarmi che il transitorio avvenga sulla tensione, se invece ci sono induttori sulla corrente.

Consideriamo il circuito magnetico di fig.12, ricordando quanto detto in precedenza

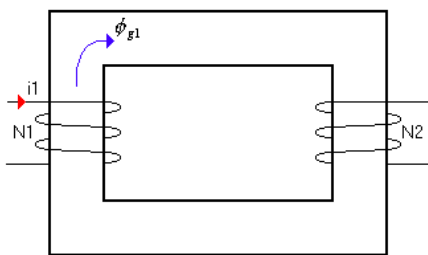


fig.12

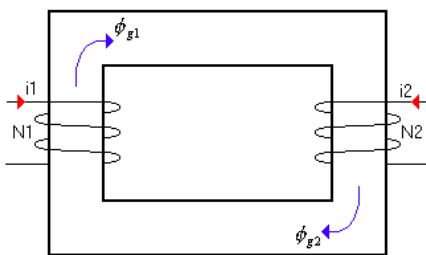


fig.13

si ha $\phi_{g1} = \frac{N_1 i_1}{\Re_{eq1}}$,

$\phi_{\Sigma 1} = N_1 \phi_{g1}$ ed ancora

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\Re_{eq1}} (1), \quad L_1 \text{ è il}$$

coefficiente che tiene conto dei fenomeni di

autoinduzione. Come è possibile osservare dalla figura, nel secondo avvolgimento non circola corrente, ma è necessario tenere conto degli effetti dovuti al flusso generato dal primo, a tal proposito si definisce il coefficiente di mutua induzione M_{21} (21 per indicare che tiene conto degli effetti sul 2 dovuti all'1), si ha che il flusso totalmente concatenato al secondo avvolgimento è dato dalla seguente relazione

$\phi_{\Sigma 21} = N_2 \phi_{g1}$ e il coefficiente di mutua è $M_{21} = \frac{\phi_{\Sigma 21}}{i_1} = N_2 \frac{N_1 i_1}{\Re_{eq1} i_1} = \frac{N_1 N_2}{\Re_{eq1}}$, pertanto la

f.e.m.i. di mutua induzione nel secondo avvolgimento è $e_{M2} = -M_{21} \frac{di_1}{dt}$. Se come illustrato in fig.13 nel secondo avvolgimento circola corrente, bisogna tenere conto del fatto che il flusso generato si concatena oltre che con se stesso con il primo avvolgimento, pertanto come nel caso precedente è necessario considerare sia gli effetti di auto che di mutua, si ha $\phi_{g2} = \frac{N_2 i_2}{\Re_{eq2}}$ e $\phi_{\Sigma 2} = N_2 \phi_{g2}$ ed infine $L_2 = \frac{\phi_{\Sigma 2}}{i_2} = \frac{N_2^2}{\Re_{eq2}}$ (2).

Anche in questo caso è possibile osservare che l'intero flusso generato dal secondo avvolgimento si concatena con il secondo $\phi_{12} = \phi_{g2}$ si ha pertanto $\phi_{\Sigma 12} = N_1 \phi_{g2}$ questa volta il coefficiente di mutua tiene conto degli effetti sull'1 dovuto al 2 ed è

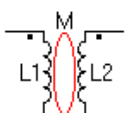
 $M_{12} = \frac{\phi_{\Sigma 12}}{i_2} = \frac{N_1 N_2}{\Re_{eq2}}$ (3) e la f.e.m.i. di mutua induzione è $e_{M1} = -M_{12} \frac{di_2}{dt}$. Osservando che $\Re_{eq1} = \Re_{eq2}$, ricavando N_1 dalla (1), N_2 dalla (2), e

fig.14

sostituendo nella (3) si ottiene $M_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$ (4) inoltre è sempre possibile dire, grazie al teorema di reciprocità che sarà dimostrato successivamente, che $M_{ij} = M_{ji}$. Nel caso di fig.13 essendo il verso del flusso di auto uguale al verso del flusso di mutua, il segno di M è positivo, ma in generale si usa contrassegnare con dei pallini, come mostrato in fig.14, due morsetti, questo viene fatto in modo tale da poter affermare che se entrambe le correnti entrano o escono da tali morsetti la mutua è positiva, questo ovviamente non vuol dire che non è possibile scegliere un verso diverso per le correnti, ma solo che in tal caso è necessario cambiare il segno della

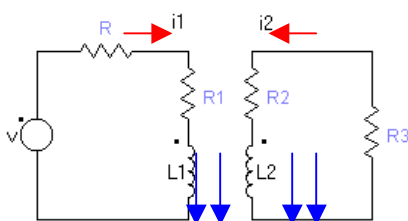


fig.15

mutua. Un accoppiamento si dice perfetto quando non vi è dispersione di flusso, cioè quando come nell'esempio di fig.13 tutto il flusso generato dagli avvolgimenti si concatena con gli altri avvolgimenti presenti nel circuito magnetico. Comunque in generale è possibile tenere conto di accoppiamenti non perfetti modificando la (4) come segue $M_{ij} = K_{ij} \sqrt{L_i L_j}$ dove K_{ij} prende il nome di

coefficiente di accoppiamento, è chiaro che nel caso di accoppiamento perfetto si ha $K_{ij} = 1$. Consideriamo il circuito di fig.15, vogliamo scrivere le equazione alle due

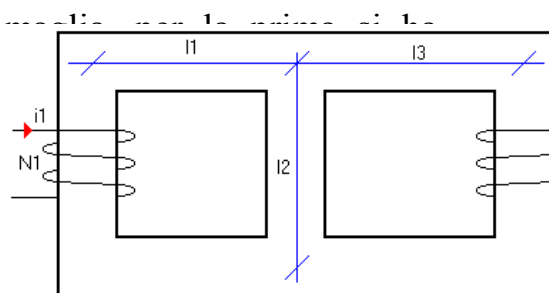


fig.16

$$e_{L1} = (R + R_1) i_1 \quad \text{dove} \quad e_{L1} = -L \frac{di_1}{dt} \quad \text{e} \quad e_M = -M \frac{di_2}{dt}$$

$$e_{L2} = (R + R_1) i_1, \quad \text{per quanto riguarda la seconda}$$

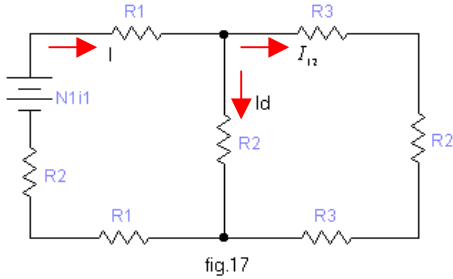
$$e_{L2} = (R_2 + R_3) i_2, \quad \text{mettendo a sistema le due}$$

le correnti. Consideriamo adesso il circuito con un accoppiamento perfetto, consideriamo

dapprima il flusso prodotto dal primo avvolgimento. Innanzitutto troviamo il

coefficiente di autoinduzione, sappiamo che $L_1 = \frac{\phi_{\Sigma 1}}{i_1}$ dove $\phi_{\Sigma 1} = N_1 \phi_{g1}$ ed ancora

$\phi_{g1} = \frac{N_1 i_1}{\mathfrak{R}_{eq1}}$ (5), pertanto sorge il problema di trovare \mathfrak{R}_{eq1} cioè la riluttanza vista dal



primo avvolgimento, a tal proposito è possibile considerare il relativo circuito elettrico equivalente rappresentato in fig.17 e procedere trattando le riluttanze dei singoli tratti di circuito come resistenze, è quindi possibile concludere che

$$\mathfrak{R}_{eq1} = \frac{(2R_3 + R_2)R_2}{2R_3 + 2R_2} + 2R_1 + R_2. \text{ Nel circuito la corrente}$$

I_d tiene conto della porzione di flusso prodotto dal primo avvolgimento che non si concatena con il secondo, con la regola del partitore di corrente è possibile concludere che $I_{12} = I \frac{R_2}{2(R_2 + R_3)}$ in termini di flusso $\phi_{12} = \phi_{g1} \frac{\mathfrak{R}_2}{2(\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3)}$ il flusso

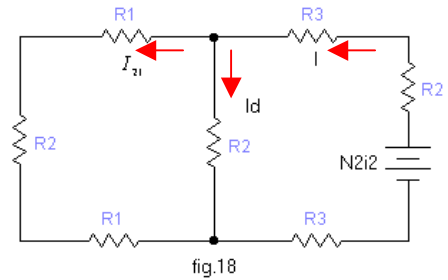
totalmente concatenato con il secondo è $\phi_{\Sigma 21} = N_2 \phi_{12}$ pertanto

$$M_{21} = \frac{\phi_{\Sigma 21}}{i_1} = \frac{N_2 \phi_{g1}}{i_1} \frac{\mathfrak{R}_2}{2(\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3)} \text{ ponendo } \frac{\mathfrak{R}_2}{2(\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3)} = K' \text{ e ricordando la (5) si ottiene}$$

$$M_{21} = K' \frac{N_2 N_1}{R_{eq1}} \text{ (6), il termine } K' \text{ prende il nome di}$$

coefficiente di ripartizione dei flussi e in generale non coincide con il coefficiente di dispersione. Considerando il circuito di fig.18 e seguendo un procedimento identico al precedente si ottiene

$$\mathfrak{R}_{eq2} = \frac{(2R_1 + R_2)R_2}{2R_1 + 2R_2} + 2R_3 + R_2 \text{ ed analogamente a}$$



come è stato ottenuto M_{21} è possibile ottenere M_{12} . Vogliamo adesso far vedere che nel caso in cui il nucleo è simmetrico il coefficiente di dispersione coincide con il coefficiente di ripartizione dei flussi, dire che il nucleo del circuito magnetico rappresentato in fig.16 è simmetrico equivale a dire che $l_1 = l_2 = l_3 = l$, sotto queste ipotesi è quindi immediato capire che $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_3$ e $\mathfrak{R}_{eq1} = \mathfrak{R}_{eq2} = \mathfrak{R}_{eq}$, si ha pertanto

$$K' = \frac{1}{4}, \quad L_1 = \frac{N_1^2}{\mathfrak{R}_{eq}} \text{ (7) e } L_2 = \frac{N_2^2}{\mathfrak{R}_{eq}} \text{ (8), detto ciò la (6) diventa } M_{21} = \frac{1}{4} \frac{N_1 N_2}{\mathfrak{R}_{eq}} \text{ (9) ma}$$

sappiamo che $M_{21} = K \sqrt{L_1 L_2}$ con K coefficiente di dispersione, sostituendo la (7) e la (8) in quest'ultima relazione si ottiene $M_{21} = K \frac{N_1 N_2}{\mathfrak{R}_{eq}}$ da cui per confronto con la (9)

segue che $K = \frac{1}{4}$, cioè il coefficiente di dispersione coincide con il coefficiente di ripartizione dei flussi.

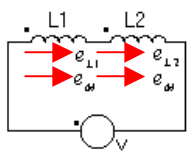


fig.19

In generale vale la regola seconda la quale in un circuito con n avvolgimenti si hanno $\frac{n^2 - n}{2}$ mutue induttanze, e n autoinduttanze.

Supponiamo di avere due induttanze collegate in serie come in rappresentato in fig.19, vogliamo trovare l'induttanza equivalente, ovvero l'induttanza che sottoposta alla stessa d.d.p. fa circolare la stessa corrente. Per far ciò

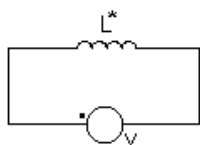


fig.20

è necessario fare attenzione al fatto che le due induttanze sono accoppiate mutuamente, scriviamo l'equazione alla maglia $v + e_{L1} + e_M + e_{L2} + e_M = 0$ ricordando a questo punto che $e_L = -L \frac{di}{dt}$ e

$$e_M = -M \frac{di}{dt} \quad \text{si ottiene} \quad v - (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt} = 0 \quad \text{ponendo}$$

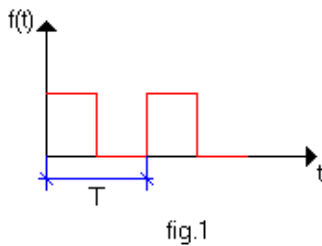
$L^* = L_1 + L_2 + 2M$ si ha $v - L^* \frac{di}{dt} = 0$, possiamo quindi concludere che il circuito di fig.19 è equivalente al circuito di fig.20, in generale si ha quindi $L^* = L_1 + L_2 \pm 2M$, essendo l'energia magnetostatica immagazzinata in un'induttanza $W = \frac{1}{2} Li^2$, dato

l'accoppiamento mutuo di fig.19 l'energia è $W = (\frac{1}{2} L_1 + \frac{1}{2} L_2 \pm M) i^2$, nel caso generale in cui le correnti che attraversano le induttanze sono diverse si ha $W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2$.

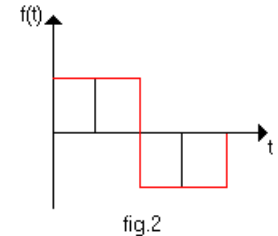
Esercizi quaderno

Corrente alternata

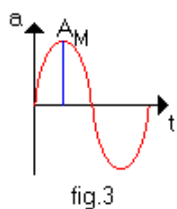
Una grandezza si dice periodica se per la funzione che la rappresenta è valida la condizione $f(t + T) = f(t)$, dove T rappresenta il periodo, un esempio di grandezza periodica è riportato in fig.1.



Una grandezza si dice invece alternativa se $f(t \pm \frac{T}{2}) = -f(t)$ in altre parole se $\forall t$ la grandezza assume valore uguale ed opposto dopo un certo tempo.



La condizione di alternatività implica la condizione di periodicità, vale a dire la classe di grandezze alternative è una sottoclasse delle grandezze periodiche, ovviamente non è vero il viceversa, in fig.2 è riportato un esempio



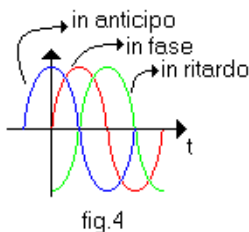
di grandezza alternativa. La grandezza alternativa più comune è quella sinusoidale rappresentata in fig.3, la funzione rappresentativa di questo tipo di grandezza è la seguente $a = A_M \sin \omega t$, dove A_M è l'ampiezza e rappresenta il valore massimo della sinusoide, ω è la pulsazione ed è legata alla frequenza tramite la relazione $\omega = 2\pi f$, infine la frequenza è

legata al periodo come segue $f = \frac{1}{T}$. Pertanto dati A_M e ω si conosce ampiezza e periodo, ma non si hanno informazioni circa il punto di partenza dell'onda, per tener conto di quanto detto è quindi necessario introdurre un altro parametro ψ che prende il nome di fase dell'onda. E' possibile inoltre classificare le sinusoidi in funzione della fase, si possono presentare i seguenti tre casi (riportati anche in fig.4):

$\psi > 0 \rightarrow$ sinusoide in anticipo $\psi < 0 \rightarrow$ sinusoide in ritardo $\psi = 0 \rightarrow$ sinusoide in fase

diremo pertanto che l'equazione di una generica grandezza sinusoidale è

$e = E_M \sin(\omega t + \psi)$. Per le grandezze periodiche è possibile definire



il valor medio $f_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$, e il valore efficace

$f_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}$, è semplice verificare che le grandezze

sinusoidali sono caratterizzate dal fatto di aver valor medio nullo, e valore efficace $A = \frac{A_M}{\sqrt{2}}$. Il valore efficace tra le altre cose è molto importante perché ha significato

fisico, per capirlo supponiamo di avere un resistore alimentato con una tensione sinusoidale, supponiamo inoltre che il resistore dissipi 5 kW, il valore efficace della tensione sinusoidale rappresenta il valore che deve avere una tensione continua applicata al resistore per provocare la stessa dissipazione di potenza.

Vediamo adesso le operazioni tra sinusoidi:

- La somma e la differenza di due sinusoidi isofrequenziali, anche di diversa ampiezza e fase, danno come risultato una sinusoide, se le sinusoidi di partenza non

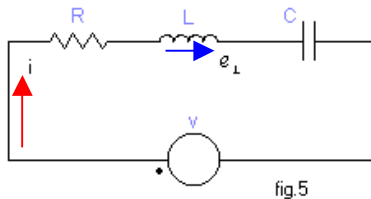
sono isofrequenziali il risultato non è una senoide ma è comunque una grandezza periodica.

- Il prodotto ed il quoziente non portano ad una senoide, per farlo vedere è necessario ricordare una delle formule di Werner $\text{sen}\alpha\text{sen}\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$, supponiamo di avere le sinusoidi $a = A_M\text{sen}\omega t$ e $b = B_M\text{sen}(\omega t - \phi)$ calcoliamo il prodotto $ab = \frac{1}{2} A_M B_M [\cos\phi - \cos(2\omega t - \phi)] = AB[\cos\phi - \cos(2\omega t - \phi)]$, è evidente che il risultato ottenuto non è una senoide.

- La derivata di una senoide è ancora una senoide, ma sfasata di $\frac{\pi}{2}$ in anticipo e di ampiezza ω volte maggiore, infatti se la senoide di partenza è $a = A_M\text{sen}\omega t$ derivando si ottiene $\frac{da}{dt} = \omega A_M \cos\omega t$, essendo $\cos\alpha = \text{sen}(\alpha + \frac{\pi}{2})$ si ha $\frac{da}{dt} = \omega A_M \text{sen}(\alpha + \frac{\pi}{2})$.

- L'integrale di una senoide è ancora una senoide, ma sfasata di $\frac{\pi}{2}$ in ritardo e di ampiezza ω volte minore, supponiamo anche questa volta che la senoide di partenza sia $a = A_M\text{sen}\omega t$, integrando si ha $\int a dt = -\frac{A_M}{\omega} \text{sen}(\omega t + \frac{\pi}{2})$, essendo $-\text{sen}(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \text{sen}(\alpha - \frac{\pi}{2})$ si conclude che $\int a dt = \frac{A_M}{\omega} \text{sen}(\omega t - \frac{\pi}{2})$.

Consideriamo il circuito di fig.5, ovviamente siamo nell'ipotesi che il sistema sia a parametri concentrati altrimenti non sarebbe possibile schematizzare R L e C, scriviamo l'equazione alla maglia



$$v + e_L - v_C = Ri \Rightarrow v - L \frac{di}{dt} - \int \frac{i}{C} dt = Ri \quad (1), \quad \text{questa è}$$

un'equazione integro-differenziale, è quindi necessario derivare in modo tale da ottenere un'equazione

differenziale del secondo ordine. Affinché la (1) (o la (1) derivata) sia un'equazione differenziale omogenea è necessario che $v=0$, è quindi possibile concludere che la soluzione dell'omogenea associata descrive il comportamento del sistema ad ingresso nullo. Le condizioni iniziali non influenzano il regime permanente, ma incidono pesantemente sul transitorio, cioè sulla risposta ad ingresso nullo, a noi comunque interessa studiare il regime permanente pertanto è possibile scegliere a piacere le condizioni iniziali, per esempio L e C scarichi. Vogliamo inoltre che la (1) sia un'equazione differenziale a coefficienti costanti, è pertanto necessario formulare alcune ipotesi sui coefficienti, in altre parole su L C e R, cominciamo con R, sappiamo che $R = \rho \frac{l}{S}$ questa è una funzione della temperatura, la prima ipotesi

consiste quindi nel supporre di essere a temperatura costante, inoltre essendo l e S caratteristiche geometriche del conduttore, è necessario ipotizzare che sia

indeformabile . Passiamo all'analisi di L, questo termine tiene conto di tutti i fenomeni magnetici nel circuito, sappiamo che $L = \frac{N^2}{\Re}$ dove $\Re = \frac{l}{\mu S}$ una prima ipotesi da fare è quindi $\mu = \text{costante}$, affinché questo si verifichi è necessario che sia coinvolto solo il primo tratto della curva di prima magnetizzazione (retta di traferro), inoltre anche in questo caso è necessario che l e S siano costanti, e quindi che il nucleo magnetico sia indeformabile, ancora è necessario che il circuito non sia sottoposto ad eventuali campi magnetici esterni variabili o sia isolato da tali, e che non vi siano fenomeni di induzione di tipo mozionale e quindi che il circuito sia fisso, soltanto sotto tali ipotesi L è costante. Analizziamo C, sappiamo che $C = \epsilon_0 \frac{S}{\delta}$, come nel caso di L in cui μ deve essere costante, anche in questo caso è necessario che sia $\epsilon_0 = \text{costante}$, cioè che il circuito non sia dielettricamente saturo, per motivi analoghi a quelli visti prima, deve essere indeformabile ed isolato da campi elettrici esterni. Infine è necessario supporre che il sistema sia lineare, questo affinché sia la risposta abbia forma d'onda simile a quella d'ingresso e comunque isofrequenziale, ovviamente il sistema è lineare solo se R L e C sono lineari.

Adesso vediamo come sia possibile, sotto le ipotesi fatte sopra, studiare il regime permanente (trovare la corrente a regime) del circuito di fig.5 evitando di risolvere l'equazione differenziale (1), lo strumento mediante il quale è possibile far ciò è il cosiddetto calcolo simbolico che ci permette di trasformare la (1) in un'equazione algebrica. Supponiamo di avere la sinusoide $b = B_M \sin(\omega t + \psi)$ (2) rappresentata in fig.6, consideriamo adesso il vettore, di modulo l'ampiezza della sinusoide B_M ,

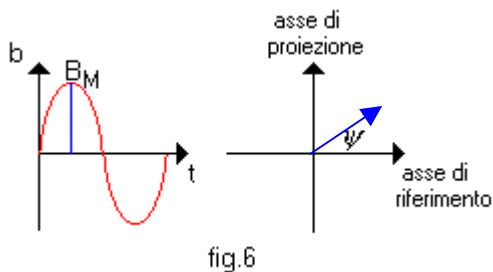


fig.6

rappresentato in figura, immaginiamo che tale vettore ruoti in senso antiorario ad una velocità angolare pari alla pulsazione della sinusoide ω , e che all'istante $t = 0$ tale vettore formi con l'asse di riferimento un angolo ψ , sotto queste ipotesi è possibile osservare che la proiezione del vettore sull'asse verticale è proprio la sinusoide b.

Scegliendo come piano il piano immaginario (o di Gauss), come mostrato in fig.7, e osservando che ad un generico istante t l'angolo che il vettore rotante \dot{B} forma con l'asse reale è $\omega t + \psi$, è possibile scrivere $\dot{B} = B_M \cos(\omega t + \psi) + j B_M \sin(\omega t + \psi) = B_M e^{j(\omega t + \psi)}$, essendo in rappresentazione complessa indifferente usare valore massimo o valore efficace, possiamo concludere che la grandezza sinusoidale (2) è rappresentata dal

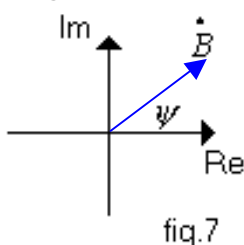


fig.7

vettore rotante $\dot{B} = B e^{j(\omega t + \psi)}$. Consideriamo il vettore rotante rappresentato in fig.8, affermare che esso è in ritardo di ϕ_B , equivale a dire che è in anticipo di $2\pi - \phi_B$, pertanto ponendo

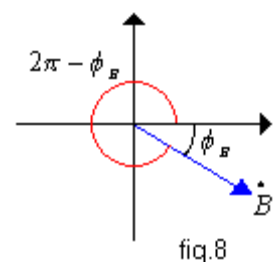


fig.8

$2\pi - \phi_B = \gamma$ si ha $\dot{B} = Be^{j(\omega t - \phi_B)} = Be^{j(\omega t + \gamma)}$, bisogna comunque prestare attenzione al fatto che $\phi_B = \arctan \frac{\text{Im}(\dot{B})}{\text{Re}(\dot{B})}$ mentre $\gamma = 2\pi + \arctan \frac{\text{Im}(\dot{B})}{\text{Re}(\dot{B})}$, per evitare di commettere errori è

consigliabile fare il disegno trigonometrico. Se mettessi sullo stesso piano due vettori isofrequenziali, e quindi con la stessa pulsazione, la distanza tra essi rimarrebbe sempre la stessa, o più correttamente l'angolo rimarrebbe costante nel tempo. Per i vettori di fig.9 è pertanto possibile dire che \dot{D} è in anticipo dell'angolo ϕ rispetto a \dot{K} , o ugualmente che \dot{K} è in ritardo dell'angolo ϕ rispetto a \dot{D} , ϕ prende il nome di sfasamento

ed è importante aver ben presente la distinzione tra fase e sfasamento.

Si definiscono operazioni compatibili al calcolo simbolico, tutte quelle operazioni tra grandezze sinusoidali che come risultato danno ancora una grandezza sinusoidale, in precedenza abbiamo già scoperto che queste sono: somma, differenza, derivazione e integrazione. Vogliamo vedere di esprimere la derivata e l'integrale di una sinusoide in forma di vettore rotante, avevamo trovato che data la sinusoide $a = A_M \sin(\omega t + \psi)$ la

derivata è $\frac{da}{dt} = \omega A_M \sin(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2})$ ma

$\omega A_M \sin(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \dot{A} = \omega A_M e^{j(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2})} = \omega A_M e^{j(\omega t + \psi)} e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega A_M e^{j(\omega t + \psi)} = j\omega \dot{A}$ pertanto

$\frac{d\dot{A}}{dt} = j\omega \dot{A}$ allo stesso modo è possibile far vedere che $\int \dot{A} dt = -j \frac{\dot{A}}{\omega}$.

In precedenza è stato detto che la corrente che compare nell'equazione integro-differenziale (1) è una grandezza sinusoidale e comunque isofrequenziale alla tensione, inoltre essendo le operazioni coinvolte in essa compatibili con il calcolo simbolico, è possibile sostituire a v ed i i relativi vettori rotanti \dot{V} ed \dot{I} , si ottiene

pertanto $\dot{V} - j\omega L \dot{I} + j \frac{\dot{I}}{\omega C} = R \dot{I}$ (3), siamo quindi riusciti a trasformare l'equazione

integro-differenziale in un'equazione algebrica. Scriviamo la (3) in modo diverso

$\dot{V} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \dot{I}$ dividendo primo e secondo membro per \dot{I} si ottiene

$\frac{\dot{V}}{\dot{I}} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$ questa è una quantità complessa, ma essendo stata ottenuta

facendo il rapporto tra due grandezze sinusoidali non è una sinusoide, inoltre essendo il rapporto tra tensione e corrente il suo significato è quello che ha la resistenza in corrente continua, cioè rappresenta la reazione del circuito al passaggio della corrente, questo numero complesso prende il nome di operatore d'impedenza e si indica con \bar{Z} , inoltre si misura in Ohm come la resistenza. Abbiamo detto che

l'impedenza $\bar{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ rappresenta la reazione del circuito al passaggio della corrente, più in dettaglio la parte reale R rappresenta la reazione passiva, mentre la parte immaginaria quella attiva, in particolare diremo che $X_L = \omega L$ è la reattanza induttiva ed $X_C = \frac{1}{\omega C}$ è la reattanza del capacitiva, la differenza rappresenta la reattanza totale del circuito $X = X_L - X_C$, è possibile scrivere l'impedenza nella forma $\bar{Z} = \sqrt{R^2 + X^2} e^{j\phi}$ dove $\phi = \arctan \frac{X}{R}$. A questo punto è possibile riformulare il principio

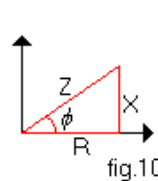


fig.10

conduttanza in c.c., è l'ammettenza

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{(R - jX)}{Z^2} = \frac{R}{Z^2} - j \frac{X}{Z^2} = G - jB, \text{ dove } G \text{ è la conduttanza e}$$

B la suscettanza. Il triangolo rettangolo rappresentato in fig.10 prende il nome di triangolo dell'impedenza, come è giusto aspettarsi in corrente continua essendo $f = 0$ si ha $\omega = 0$ e pertanto $Z = \infty$, cioè il circuito risulta aperto, questo a causa della presenza del

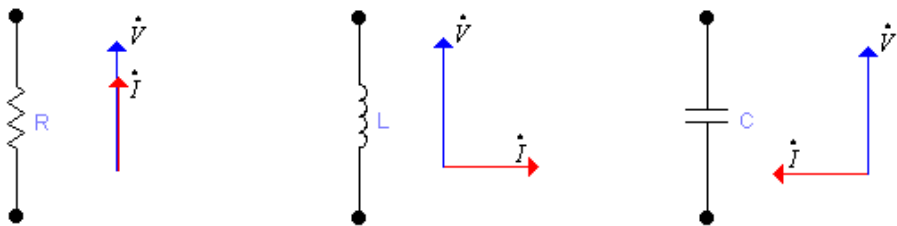


fig.11

condensatore. Consideriamo la tensione $V = V_M \sin \omega t$, facendo riferimento alla fig.11 vediamo tre casi elementari:

- Resistenza

$\bar{Z} = R e^{j\phi}$ $\dot{I} = \frac{\dot{V}}{\bar{Z}} = \frac{V e^{j\omega t}}{Z e^{j\phi}} = \frac{V}{Z} e^{j(\omega t - \phi)}$ ma essendo $\phi = 0$ si ha $\dot{I} = \frac{V}{Z} e^{j\omega t} = I e^{j\omega t}$ pertanto \dot{V} e \dot{I} sono in fase come mostrato in figura.

- Induttanza

$\bar{Z} = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}}$ pertanto $\dot{I} = \frac{\dot{V}}{\bar{Z}} = \frac{V e^{j\omega t}}{\omega L e^{j\frac{\pi}{2}}} = \frac{V}{\omega L} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}$ cioè come mostrato in figura la

corrente è in ritardo di un angolo pari a $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla tensione, il risultato ottenuto è interpretabile fisicamente ricordando che l'induttore è un bipolo inerziale alla corrente.

- Capacità

In questo caso $\bar{Z} = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}$ e quindi si ha $\dot{I} = \frac{\dot{V}}{\bar{Z}} = \frac{V e^{j\omega t}}{\frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}} = V \omega C e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}$ in

questo caso la corrente è quindi in anticipo rispetto alla tensione di $\frac{\pi}{2}$, o ugualmente la tensione è in ritardo dello stesso angolo rispetto alla corrente, il risultato ottenuto fisicamente è dovuto al fatto che il condensatore è un bipolo inerziale alla tensione.

Circuiti R-L-C risonanza e rifasamento

Un circuito R-L-C è un circuito costituito da bipoli resistivi, induttivi e capacitivi, pertanto il circuito rappresentato in fig.12 rappresenta la maggior parte dei circuiti reali. L'equazione alla maglia per il circuito di figura è

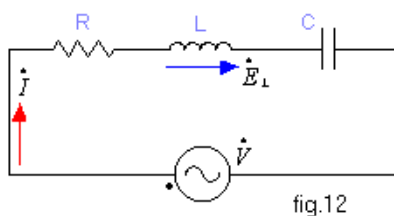


fig.12

$\dot{V} + \dot{E}_L - \dot{V}_C = R \dot{I}$, ricordando i risultati trovati precedentemente diventa $\dot{V} = R \dot{I} + j\omega L \dot{I} - j \frac{\dot{I}}{\omega C}$, anche se

non ne siamo certi supponiamo che la corrente nel circuito sia in ritardo, prendendo come riferimento (vettore di fase nulla) la tensione \dot{V} , e ricordando che la caduta di tensione su un'induttanza è 90° in ritardo rispetto

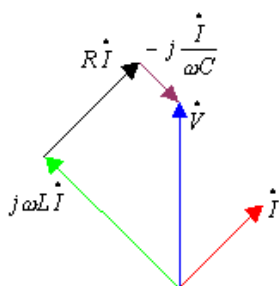


fig.13

alla corrente, su una capacità 90° in anticipo, e infine su una resistenza è in fase, è possibile costruire il diagramma vettoriale rappresentativo dell'equilibrio elettrico del circuito mostrato in fig.13, quello che è possibile notare è che qualunque sia \dot{V} la somma vettoriale delle singole cadute di tensione deve necessariamente essere uguale a \dot{V} stesso. Riconsideriamo il triangolo delle impedenze rappresentato in fig.10, tale triangolo è omotetico,

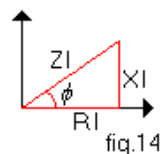


fig.14

cioè moltiplicando tutti i lati per uno stesso scalare gli angoli non cambiano, è pertanto ovvio che moltiplicando ogni lato per la corrente si ottiene il triangolo rappresentato in fig.14, che prende il nome di triangolo delle tensioni.

Vogliamo vedere adesso come si comporta il circuito al variare della frequenza, consideriamo a tal proposito consideriamo il circuito di

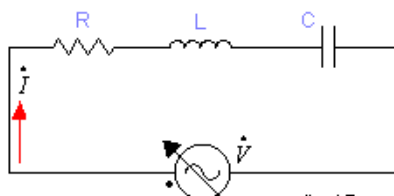


fig.15

fig.15 nel quale il generatore è a frequenza variabile. Ricordiamo che il modulo della corrente è dato dalla relazione $I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} (1)$, essendo

$X_L = 2\pi f L$ e $X_C = \frac{1}{2\pi f C}$ questa è una funzione della frequenza, inoltre essa presenta un massimo in corrispondenza del valore di f che rende minimo il denominatore, deve

essere pertanto rispettata la condizione $X_L - X_C = 0 \Rightarrow X_L = X_C \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, questo particolare valore di frequenza prende il nome di frequenza di risonanza del circuito, l'andamento della corrente e quindi della (1) è riportato in fig.16 (linea rossa), inoltre

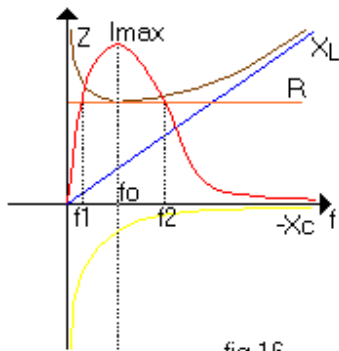


fig.16

nello stesso grafico sono riportati gli andamenti dell'impedenza, delle reattanze e della resistenza, al variare della frequenza. Come è possibile notare sia matematicamente che graficamente in condizioni di risonanza l'impedenza coincide con la resistenza del circuito, gli effetti della capacità e dell'induttanza si annullano, pertanto per il generatore è come se il circuito fosse puramente ohmico e quindi tensione e corrente sono in fase. In risonanza si ha quindi $I_0 = \frac{V}{R}$, se imponiamo nella

(1) che $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ risolvendo si trovano due soluzioni, ovvero due valori di frequenza per i quali la condizione imposta è rispettata, tali valori sono indicati in figura con f_1 ed f_2 e prendono il nome di frequenze di taglio, l'intervallo di frequenze delimitato da tali valori prende il nome di banda passante, inoltre in corrispondenza delle frequenze di taglio si ha uno sfasamento tra tensione e corrente di $\frac{\pi}{4}$, infatti per tali

valori è rispettata la condizione $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{V}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ ma essendo $I_0 = \frac{V}{R}$ si ha

$$\frac{V}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{V}{R\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{X^2}{R^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1 + \frac{X^2}{R^2} = 2 \Rightarrow \frac{X}{R} = 1 \text{ cioè la tangente dell'angolo}$$

di sfasamento tra tensione e corrente è 1, da cui segue che lo sfasamento è proprio $\frac{\pi}{4}$.

I circuiti RLC risonanti sono alla base dei circuiti sintonizzatori, e la banda passante rappresenta la selettività del circuito, cioè una buona radio deve avere una banda passante stretta per evitare interferenze con le vicine frequenze trasmesse da altri emittenti. Un'altra cosa da notare è che per $f < f_0$ la corrente è in anticipo rispetto alla tensione e quindi che il circuito è prevalentemente capacitivo, per $f > f_0$ la corrente è in ritardo e nel circuito prevalgono gli effetti induttivi. Si definisce

coefficiente di risonanza la quantità $Q = \frac{V_{0L}}{V_R} = \frac{V_{0C}}{V_R} = \frac{\omega_0 L I_0}{R I_0} = \frac{L}{R} \frac{1}{\sqrt{LC}}$, si noti che

$V_{0L} = V_{0C}$ in quanto in risonanza essendo in valore assoluto la reattanza induttiva uguale alla reattanza capacitiva, le cadute di tensione su di esse sono le stesse. Si

definisce inoltre larghezza di banda $B = \frac{f_0}{Q} = 2\pi RC$, è da notare che l'altezza della

campana (andamento della corrente in funzione della frequenza), rappresentata dal

valore di corrente in risonanza, dipende esclusivamente dalla resistenza del circuito, pertanto per modificare la selettività del circuito fissata la corrente non è possibile agire su R, è quindi necessario agire su C, facendo però attenzione al fatto che il prodotto LC deve rimanere costante, in quanto da questo dipende il valore della frequenza di risonanza. Grazie alle considerazioni fatte appare ormai semplice la dipendenza della selettività dai parametri circuitali, purtroppo nella realtà non è

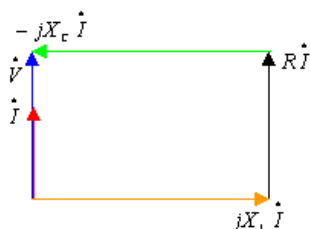


fig.17

possibile diminuire C e quindi aumentare L eccessivamente in quanto potrebbero nascere delle sovratensioni localizzate ai morsetti dell'induttore e del condensatore che porterebbero alla distruzione degli stessi, abbiamo infatti visto che in condizioni di risonanza la corrente dipende esclusivamente da R, ma se R è molto più piccola di X_C e di X_L la caduta di tensione su L e su C è molto più grande rispetto a quella che c'è su R, quanto

detto può apparire più chiaro osservando il diagramma vettoriale di fig.17.

Quella vista è la risonanza serie, adesso vogliamo vedere qual è la condizione di

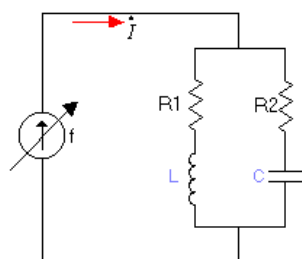


fig.18

risonanza nel circuito di fig.18 (risonanza parallelo). Bisogna partire dal fatto che il circuito risuona quando per il generatore il carico è puramente ohmico, per far ciò è necessario fare il parallelo tra le impedenze dei due rami e porre la parte immaginaria uguale a zero, quando bisogna fare il parallelo tra due impedenze è conveniente passare alle ammettenze, in quanto l'ammettenza di un parallelo è la somma delle ammettenze dei singoli rami, si ha pertanto

$\bar{Y}_p = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 = G_1 + G_2 - j(B_1 + B_2)$ è quindi necessario che sia $B_1 + B_2 = 0$ essendo $B_1 = \frac{X_L}{Z_1^2}$ e $B_2 = -\frac{X_C}{Z_2^2}$ deve essere $\frac{X_L}{Z_1^2} - \frac{X_C}{Z_2^2} = 0$, risolvendo quest'equazione si trova

$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, siamo pertanto ricaduti nel caso precedente, concludiamo quindi che la

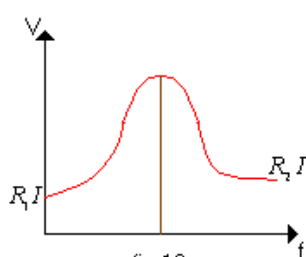


fig.19

condizione di risonanza parallelo coincide con quella serie. Tenendo conto del fatto che il modulo della d.d.p. ai capi del parallelo è $V = \frac{I}{Y_p}$ e che per $f=0$ si ha $V = R_1 I$ e per $f \rightarrow \infty$ $V = R_2 I$, è possibile verificare che l'andamento della tensione ai capi del parallelo al variare della frequenza è all'incirca quello rappresentato in fig.19.

Consideriamo il circuito ed il relativo diagramma vettoriale di fig.20, la corrente, come è possibile notare, è stata scomposta in componente attiva e reattiva, supponiamo adesso di inserire nel circuito un condensatore come mostrato in fig.21, supponiamo inoltre che la capacità del condensatore sia tale che in esso circoli una corrente uguale in modulo alla componente reattiva relativa al ramo RL, in questa situazione, come è possibile notare dal diagramma vettoriale di fig.21, la corrente erogata dal generatore è in fase con la tensione, il circuito di fig.21 è pertanto in

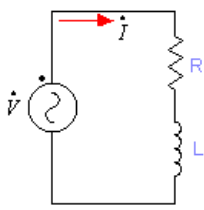


fig.20

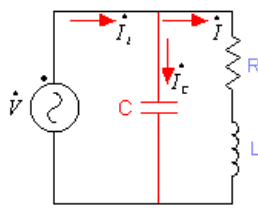
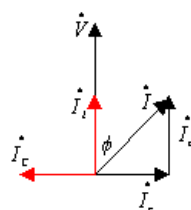


fig.21



risonanza. Quello che è stato fatto è il rifasamento totale del circuito di fig.20, totale perché l'azione del condensatore è stata quella di

annullare lo sfasamento tra tensione e corrente, se la capacità fosse stata diversa lo sfasamento tra tensione e corrente si sarebbe comunque ridotto, e in questa situazione avremmo semplicemente detto il circuito di fig.21 rifasato. Vogliamo adesso trovare il valore della capacità per il quale il rifasamento è totale, partiamo dal fatto che il carico visto dal generatore deve essere puramente ohmico, in altre parole la parte immaginaria dell'impedenza deve essere nulla, il che equivale a dire che la parte immaginaria dell'ammettenza deve essere nulla. L'ammettenza equivalente del circuito di fig.21 è data dalla somma delle ammettenze dei singoli rami, cioè

$\bar{Y}_{eq} = \bar{Y}_L + \bar{Y}_C$, essendo $\bar{Z}_L = R + jX_L$ e $\bar{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C}$, segue che $\bar{Y}_L = \frac{R}{Z^2} - j\frac{X_L}{Z^2}$ e $\bar{Y}_C = j\omega C$ sostituendo si ottiene $\bar{Y}_{eq} = \frac{R}{Z^2} - j\left(\frac{X_L}{Z^2} - \omega C\right)$, deve essere pertanto

$$\frac{X_L}{Z^2} - \omega C = 0 \Rightarrow \frac{\omega L}{Z^2} = \omega C \Rightarrow C = \frac{L}{Z^2}. \text{ E' importante notare che il modulo della corrente } I$$

erogata dal generatore è diverso nei due circuiti, è questo il grosso vantaggio offerto dal rifasamento, infatti se in una linea elettrica diminuisce la corrente diminuiscono le perdite per effetto Joule e diminuisce la caduta di tensione. Il rifasamento visto è di tipo parallelo, ed è quello che nella realtà viene maggiormente usato, i motivi sono svariati, è possibile innanzitutto osservare che il rifasamento parallelo è più efficace, in secondo luogo si presta maggiormente ad interventi di manutenzione in quanto è possibile intervenire sui condensatori di rifasamento senza dover interrompere l'alimentazione del carico.

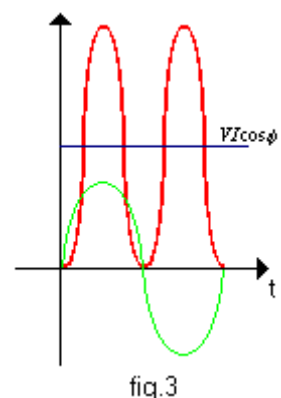
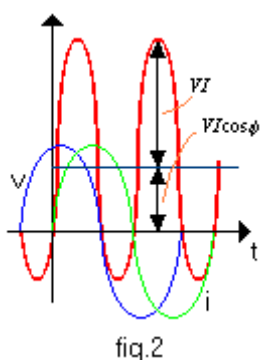
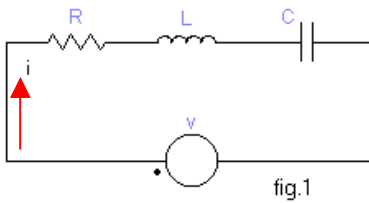
Potenze

Consideriamo il circuito di fig.1, e supponiamo che la f.e.m. erogata dal generatore sia di tipo sinusoidale, per comodità prendiamo come riferimento, la corrente, in altre parole supponiamo che la corrente abbia fase nulla, si ha pertanto $v = V_M \sin(\omega t + \phi)$ e $i = I_M \sin \omega t$. In precedenza è stato affermato che la potenza in un circuito elettrico è data dal prodotto tra tensione e corrente, anche in questo caso affermeremo che istante per istante la potenza erogata dal generatore è $p = vi$, sostituendo le relazioni scritte sopra per v e i , e tenendo conto che

che $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$, si ottiene

$p = \frac{1}{2} V_M I_M [\cos \phi - \cos(2\omega t + \phi)]$, inoltre essendo $V_M = V\sqrt{2}$ e $I_M = I\sqrt{2}$, dove V e I sono rispettivamente il valore efficace della tensione e della corrente, si ha $p = VI [\cos \phi - \cos(2\omega t + \phi)]$ (a) ricordando inoltre le formule di addizione $p = VI [\cos \phi - \cos(2\omega t) \cos \phi + \sin(2\omega t) \sin \phi]$ (1). Nel circuito di fig.1 parte della potenza erogata dal generatore istante per istante viene dissipata sulla resistenza, la rimanente parte interessa invece i campi elettrici e magnetici, la prima prende il nome di potenza attiva istantanea, la seconda, potenza reattiva istantanea, diremo pertanto che $p = p_a + p_r$ (2). Abbiamo detto che la potenza attiva istantanea è la potenza che istante per istante viene dissipata sulla resistenza, per la legge di Joule si ha pertanto $p_a = Ri^2 = RI_M^2 \sin^2(\omega t) = RI_M^2 \frac{1}{2} [1 - \cos(2\omega t)]$ esprimendo la corrente in termini di valore efficace e sviluppando i prodotti si ottiene $p_a = RII - RII \cos(2\omega t)$, ricordando il triangolo delle tensioni si ha $RI = V \cos \phi$, sostituendo si ottiene $p_a = VI \cos \phi - VI \cos \phi \cos(2\omega t)$ (b), tenendo conto del risultato ottenuto la (1) diventa

$p = p_a + VI \sin(2\omega t) \sin \phi$ per confronto con la (2) si ha inoltre $p_r = VI \sin(2\omega t) \sin \phi$ (c). In fig.2 è riportato l'andamento della potenza istantanea espressa dalla (a), nello stesso grafico è inoltre riportato l'andamento della tensione e della corrente, la cosa evidente è che la potenza fluttua attorno al valore $VI \cos \phi$ che rappresenta pertanto il valor medio della potenza istantanea, è inoltre possibile notare che questa quantità è anche il valor medio della potenza attiva istantanea, si definisce potenza attiva, in questo caso erogata dal generatore, proprio questo valor medio, diremo pertanto che $P = VI \cos \phi = RI^2$, il termine $VI \cos(2\omega t + \phi)$ prende il nome di potenza fluttuante, e come è possibile notare dalla figura fluttua ad una frequenza che è due volte quella della f.e.m. erogata dal generatore. In fig.3 è



invece riportato l'andamento della potenza attiva istantanea, come è già stato detto essa si compone di una parte costante e di una fluttuante, il termine costante coincide con il valor medio, e come visto prima con il valor medio della potenza istantanea, il termine $VI \cos \phi \cos(2\omega t)$ rappresenta la potenza attiva istantanea fluttuante.

L'andamento della potenza reattiva istantanea, rappresentato dalla (c), è riportato in

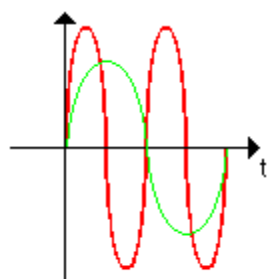


fig.4

fig.4, e come è possibile notare non ha valor medio, o per meglio dire il suo valor medio è nullo, si definisce potenza reattiva l'ampiezza della potenza reattiva istantanea, diremo quindi che la potenza reattiva è $Q = VI \sin \phi$. Definiamo potenza apparente l'ampiezza della potenza fluttuante $S = VI = \sqrt{P^2 + Q^2} = ZI^2$, si definisce fattore di potenza il rapporto tra la potenza attiva e apparente $f.d.p. = \frac{P}{S} = \cos \phi$.

Consideriamo i fasori $\dot{V} = Ve^{j\psi_V}$ e $\dot{I} = Ie^{j\psi_I}$ rappresentati in fig.5, il complesso coniugato di \dot{I} è $\dot{I}^\vee = Ie^{-j\psi_I}$, facendo il prodotto tra \dot{V} e \dot{I}^\vee si ottiene

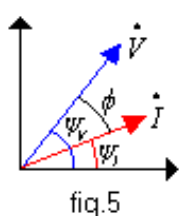


fig.5

$\dot{V} \dot{I}^\vee = Ve^{j\psi_V} Ie^{-j\psi_I} = VIe^{j(\psi_V - \psi_I)} = VIe^{j\phi}$ (3) dove l'angolo ϕ , indicato anche in figura, rappresenta lo sfasamento tra i due fasori, ricordando che $e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$ (formule di Eulero), la (3) diventa

$\dot{V} \dot{I}^\vee = VI \cos \phi + jVI \sin \phi$, indicando questa quantità con \bar{S} , e osservando che la parte reale del numero complesso ottenuto è proprio la potenza

attiva, la parte immaginaria la potenza reattiva, si ha $\bar{S} = P + jQ$, la quantità ottenuta prende il nome di potenza complessa, essa non ha alcun significato fisico, ma è comunque di grande utilità pratica grazie anche al fatto che il suo modulo rappresenta la potenza apparente, se per esempio volessimo trovare la potenza attiva e reattiva erogata da un generatore, in un circuito qualunque, basterebbe fare il prodotto $\dot{V} \dot{I}^\vee$, è

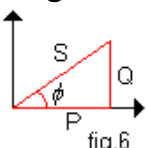


fig.6

è necessario prestare attenzione al segno della parte immaginaria, se per esempio fosse negativa significherebbe che il circuito è a prevalenza capacitiva. Come è stato fatto per l'impedenza e le tensioni è possibile definire il triangolo delle potenze rappresentato in fig.6.

Il teorema di Boucherot dice che per trovare la potenza attiva complessiva di più carichi, è possibile sommare le singole potenze attive, mentre per trovare quella reattiva è possibile sommare algebricamente le singole potenze reattive, è pertanto necessario ricordare che la potenza reattiva di un carico prevalentemente capacitivo, è

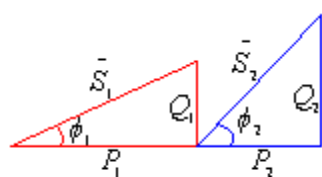


fig.7

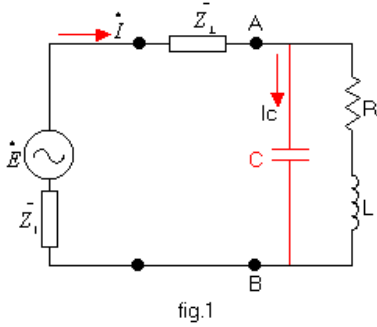
negativa, prevalentemente induttivo positiva. Supponiamo di avere due carichi, i cui triangoli delle potenze sono rappresentati in fig.7, come è possibile notare sommando le potenze attive e reattive non si fa altro che sommare le componenti delle potenze complesse, da ciò si vede facilmente che in generale non è possibile sommare le

potenze apparenti, infatti questo si può fare solo quando le due potenze complesse

hanno lo stesso angolo caratteristico, cioè $\phi_1 = \phi_2$, nel nostro caso diremo quindi che $P_T = P_1 + P_2$, $Q = Q_1 + Q_2$ e $S = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2}$.

Ancora sul rifasamento

Introdotte le potenze è possibile affermare che rifasare vuol dire fornire parte (rifasamento parziale) o tutta (rifasamento totale) della potenza reattiva necessaria al carico in loco. Consideriamo il circuito di fig.1, per adesso supponiamo che il condensatore non sia connesso,



la corrente è $\dot{I} = \frac{\dot{E}}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_L + \bar{Z}_{CA}}$ dove \bar{Z}_{CA} è l'impedenza del

carico, per calcolare le potenze (attiva e reattiva) assorbite dal carico calcoliamo la potenza complessa $\bar{S}_{CA} = \bar{V}_{AB} \dot{I}$ essendo $\bar{V}_{AB} = \bar{Z}_{CA} \dot{I}$ si ha $\bar{S}_{CA} = \bar{Z}_{CA} \dot{I} \dot{I} = \bar{Z}_{CA} I^2 = RI^2 + j\omega LI^2$

pertanto la potenza reattiva assorbita dal carico è $Q_{CA} = \omega LI^2$ essendo $I = \frac{V_{AB}}{Z_{CA}}$ diventa

$Q_{CA} = \omega L \frac{V_{AB}^2}{Z_{CA}^2}$, per rifasare totalmente è quindi necessario inserire un condensatore

come mostrato in figura, in grado di produrre localmente la stessa potenza reattiva, per il condensatore di figura si ha $Q_C = V_{AB} I_C \sin \psi$ ma sappiamo che la corrente in un condensatore è sfasata di 90° rispetto alla tensione ai suoi morsetti, pertanto si ha $\sin \psi = 1$, e quindi $Q_C = V_{AB} I_C$, inoltre è possibile affermare che $I_C = \frac{V_{AB}}{X_C}$, in

conclusione la potenza reattiva del condensatore è $Q_C = \frac{V_{AB}^2}{X_C} = \omega C V_{AB}^2$, per il

rifasamento totale abbiamo detto che è necessario sia verificata la condizione $Q_C = Q_{CA} \Rightarrow \omega C V_{AC}^2 = \omega L \frac{V_{AB}^2}{Z_{CA}^2} \Rightarrow C = \frac{L}{Z_{CA}^2}$, questo è lo stesso risultato ottenuto

precedentemente in altro modo. Vediamo adesso come si procede per rifasare parzialmente, indichiamo con ϕ_f lo sfasamento finale tra tensione sul carico (\bar{V}_{AB}) e corrente, cioè lo sfasamento che vogliamo ci sia dopo aver rifasato, è possibile scrivere $\tan \phi_f = \frac{Q_f}{P_{CA}} = \frac{Q_{CA} - Q_C}{P_{CA}}$ ricordando la relazione ricavata precedentemente per

Q_C si ha $\tan \phi_f = \frac{Q_f}{P_{CA}} = \frac{Q_{CA} - \omega C V_{AB}^2}{P_{CA}} \Rightarrow C = \frac{Q_{CA} - P_{CA} \tan \phi_f}{\omega V_{AB}^2}$. In realtà in seguito al

rifasamento si ha un aumento della tensione sul carico, e di conseguenza una maggiore potenza reattiva assorbita, questo potrebbe portare a pensare che la capacità prevista non è sufficiente a rifasare il carico, quanto detto in realtà non avviene perché aumentando la V_{AB} aumenta anche la potenza reattiva del condensatore, il

risultato dei due effetti è nullo. Vediamo come varia la potenza attiva (per la reattiva valgono gli stessi ragionamenti) al variare della tensione, sappiamo che

$P = RI^2 = R \frac{V^2}{Z^2} = KV^2$, per un diverso valore di tensione si ottiene allo stesso modo

$P' = KV'^2$, facendo il rapporto tra le due relazioni ottenute si ha

$\frac{P'}{P} = \left(\frac{V'}{V}\right)^2 \Rightarrow P' = P \left(\frac{V'}{V}\right)^2$ è quindi possibile notare che ad una variazione di tensione

corrisponde una più grande variazione di potenza, in altre parole la variazione relativa di potenza è più grande della variazione relativa di tensione.

In genere il fattore di potenza non è costante, per questo motivo nel calcolare la capacità necessaria per rifasare un impianto si fa riferimento al fattore di potenza medio, comunque esistono i cosiddetti rifasatori automatici a gradino che sono sistemi in grado di rilevare il fattore di potenza e aumentare o diminuire, inserendo o escludendo condensatori, la capacità della batteria di condensatori di rifasamento. Ovviamente all'utente non converrebbe affrontare i costi necessari a rifasare, questo perché essendo gli effetti: minori cadute di tensione in linea, minori cadute internamente al generatore, minori perdite in linea, minori perdite interne al generatore, migliore utilizzo della linea e migliore utilizzo del generatore, apparentemente i vantaggi sono tutti della società elettrica, questo in realtà non è vero per il semplice motivo che l'ENEL per utenze relativamente grosse installa un contatore di energia reattiva.

Regime periodico non sinusoidale

Ci occupiamo adesso di grandezze la cui forma d'onda non è perfettamente sinusoidale, supponiamo che la forma d'onda sia quella di fig.1, consideriamo inoltre la sinusoide equivalente di fig.2, questa ha la caratteristica di avere la stessa

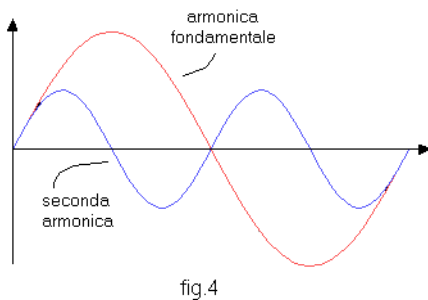
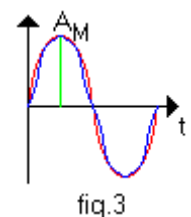
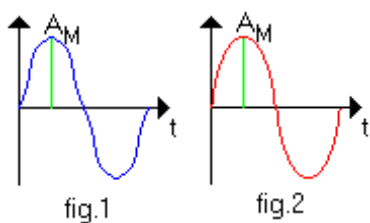
pulsazione e la stessa ampiezza della grandezza di fig.1, rappresenta quindi un modello ideale. Sovrapponendo le due onde nel modo

migliore come mostrato in fig.3, ovvero facendo in modo che la differenza tra le ordinate sia minima, ed indicando inoltre con A la massima differenza che in tale situazione si ha tra le ordinate, si

definisce coefficiente di scostamento la quantità

$K_d = \frac{A}{A_M}$ dove A_M è l'ampiezza dell'onda. Lo

scostamento fornisce quindi una misura di quanto la grandezza somiglia ad una sinusoide, se tale quantità non è molto grande, ai fini dello studio è possibile supporre che l'onda sia una sinusoide. Nel caso in cui



lo scostamento è eccessivo, è invece necessario ricorrere allo sviluppo in serie di Fourier, il quale ci permette di scomporre la grandezza nella somma di infinite sinusoidi (armoniche) di pulsazione diversa, data la grandezza v , lo sviluppo in serie potrebbe essere per esempio $v = V_0 + V_{M1}\text{sen}(\omega t + \psi_1) + V_{M2}\text{sen}(2\omega t + \psi_2) + \dots$ il termine V_0 è costante, $V_{M1}\text{sen}(\omega t + \psi_1)$ è l'armonica fondamentale, $V_{M2}\text{sen}(2\omega t + \psi_2)$ è la seconda armonica, continuando ci sono le altre infinite armoniche, come è possibile notare in fig.4 la seconda armonica ha frequenza doppia rispetto alla prima, un'altra cosa da sottolineare è che le grandezze alternative non hanno armoniche dispari. Ovviamente non è possibile trattare infinite sinusoidi, anche in questo caso è quindi

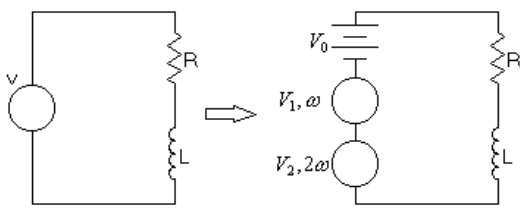


fig.5

necessario fare un'approssimazione, decidendo di trascurare le armoniche superiori ad un certo ordine da noi stabilito. Supponiamo adesso che la grandezza v sia la tensione erogata da un generatore, come mostrato in fig.5, grazie allo sviluppo in serie di Fourier è possibile essere certi che il generatore sia equivalente ai tre

generatori mostrati in figura. A questo punto per trovare la corrente che circola nel circuito è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti, come

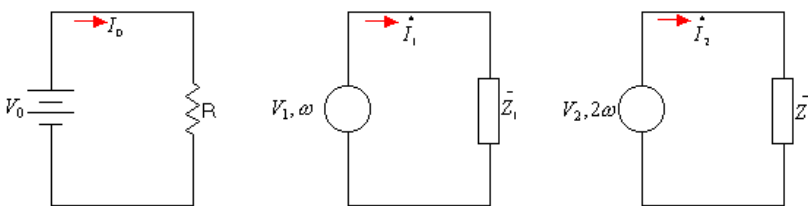


fig.6

mostrato in fig.6 bisogna quindi considerare le cause separatamente e sovrapporre gli effetti, è importante fare attenzione al fatto che non è possibile sommare i fasori delle correnti, poiché questo

implicherebbe che la corrente risultante, ovvero la corrente che circola nel circuito di fig.5, sia sinusoidale, il che è fisicamente impossibile, è pertanto necessario sommare le espressioni istantanee delle correnti. Come è possibile notare dalla figura, l'impedenza relativa al circuito in cui agisce la componente continua è costituita,

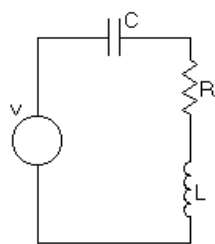


fig.7

come è ovvio che sia, dalla sola resistenza, inoltre le impedenze Z_1 e Z_2 sono diverse, infatti nel primo caso si ha $Z_1 = R + j\omega L$, nel secondo $Z_2 = R + j2\omega L$. Come detto prima in generale la corrente non è sinusoidale, esiste però un caso in cui nonostante la tensione non sia sinusoidale la corrente lo è, consideriamo il circuito di fig.7, e supponiamo che sia $v = V_0 + V_{M3}\text{sen}(3\omega t + \psi_3)$ cioè che la tensione sia la somma di una componente continua e di una sola armonica, quello di

cui è possibile rendersi conto applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, è che la componente continua non contribuisce alla corrente, infatti nel circuito è presente un condensatore che a regime in corrente continua rappresenta un'interruzione del circuito, la corrente nel circuiti di figura sarà pertanto del tipo $i = I_{M3}\text{sen}(3\omega t + \psi_3 - \phi_3)$.

Supponiamo di avere un circuito in cui si ha $v = V_0 + V_{M1}\sin(\omega t + \psi_1) + V_{M2}\sin(2\omega t + \psi_2)$ e $i = I_0 + I_{M1}\sin\omega t + I_{M2}\sin 2\omega t$, vogliamo trovare la potenza attiva, anche in questo caso la potenza istantanea è data dal prodotto tra tensione e corrente, tenendo conto che $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ e che $I_M = \sqrt{2}I$ e che $V_M = \sqrt{2}V$ si ha

$$p = vi = V_0I_0 + V_0I_{M1}\sin(\omega t) + V_0I_{M2}\sin(2\omega t) + V_{M1}I_0\sin(\omega t + \psi_1) + V_1I_1[\cos\psi_1 - \cos(2\omega t + \psi_1)] +$$

$$+ V_1I_2[\cos(\omega t) - \cos(3\omega t + \psi_1)] + I_0V_{M2}\sin(2\omega t + \psi_2) + V_2I_1[\cos(\omega t + \psi_2) - \cos(3\omega t + \psi_2)] + V_2I_2$$

$$[\cos\psi_2 - \cos(4\omega t + \psi_2)],$$

ricordando che la potenza attiva è definita come il valor medio della potenza istantanea, ed essendo il valor medio di seno e coseno uguale a zero, la potenza attiva è $P = V_0I_0 + V_1I_1\cos\psi_1 + V_2I_2\cos\psi_2$, il risultato ottenuto, essendo la somma delle potenze dovute alle singole armoniche che agiscono separatamente, ci permette di fare la conclusione molto importante che in regime periodico non sinusoidale (e solo in questo caso) vale il principio di sovrapposizione degli effetti per le potenze. Anche se in questo caso non ha alcun significato fisico, per analogia si definisce potenza reattiva la quantità $Q = V_1I_1\sin\psi_1 + V_2I_2\sin\psi_2$. Il valore efficace della tensione erogata dal generatore è dato dalla radice quadra della somma dei quadrati dei valori efficaci delle tensioni relative alle singole armoniche, cioè $V = \sqrt{V_0^2 + V_1^2 + V_2^2}$, allo stesso modo il valore efficace della corrente che circola nel circuito è $I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2}$, anche in questo caso si definisce potenza apparente la quantità $S = VI = \sqrt{V_0^2 + V_1^2 + V_2^2}\sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2}$, è necessario fare attenzione al fatto che questa volta la potenza apparente non coincide con $\sqrt{P^2 + Q^2}$, è però possibile, per avere una forma simile, scrivere la potenza apparente come $S = \sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}$, dove D rappresenta la potenza deformante, e fornisce una misura dello scostamento che si ha dal regime sinusoidale ideale. Il fattore di potenza è sempre definito come il rapporto tra la potenza attiva e apparente, cioè $f.d.p. = \frac{P}{S}$. In questo caso il rifasamento va fatto rispetto all'armonica che risulta più gravosa, supponiamo ad esempio che questa sia la quinta, in tal caso per ottenere la capacità di rifasamento è necessario imporre la condizione $5\omega CV_5^2 = 5\omega LI_5^2$, così facendo vengono rifasate anche le altre armoniche, addirittura per qualcuna di esse il condensatore potrebbe risultare eccessivo andando oltre il rifasamento (sfasando al contrario tensione e corrente). In fig.8 è riportato un segnale con una grossa terza armonica, questo è sempre riconoscibile dal fatto che presenta un avvallamento centrale, e inoltre un segnale con una grossa seconda armonica.

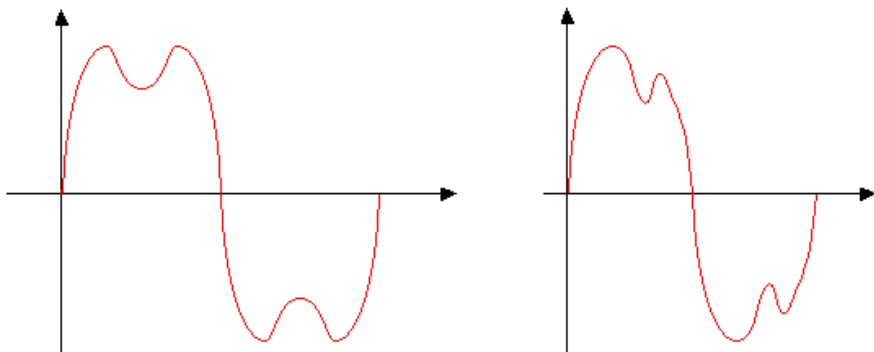


fig.8

Sistemi trifase

Consideriamo un cilindro sul quale è avvolta una bobina, e supponiamo che tale cilindro sia immerso in un ambiente in cui è presente un campo magnetico costante ed uniforme, immaginiamo adesso che il cilindro ruoti ad una velocità angolare costante ω , in tali condizione quello che avviene è la produzione di una forza elettro motrice sinusoidale di pulsazione ω , ovviamente se l'avvolgimento è chiuso in esso a causa della f.e.m. circolerà una corrente. Se sul cilindro vi sono più avvolgimenti, come mostrato in fig.1, su ognuno di essi in seguito alla rotazione si genererà una f.e.m., inoltre tali forze elettro motrici saranno sfasate tra loro degli stessi angoli con cui sono sfasate nello

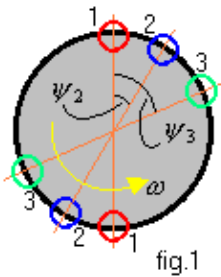


fig.1

spazio, si avrà pertanto:

$$e_1 = E_{M1} \sin(\omega t)$$

$$e_2 = E_{M2} \sin(\omega t - \psi_2)$$

$$e_3 = E_{M3} \sin(\omega t - \psi_3)$$

In particolare se i tre avvolgimenti sono uguali, ovvero hanno lo stesso numero di spire, si ha $E_{M1} = E_{M2} = E_{M3} = E_M$, consideriamo adesso la situazione rappresentata in fig.2, come è possibile notare si hanno tre bobine uguali disposte a 120° , in tale situazione le tensioni prodotte sono:

$$e_1 = E_M \sin(\omega t)$$

$$e_2 = E_M \sin(\omega t - \frac{2}{3}\pi)$$

$$e_3 = E_M \sin(\omega t - \frac{4}{3}\pi)$$

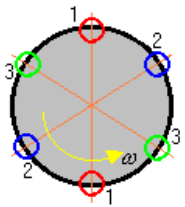
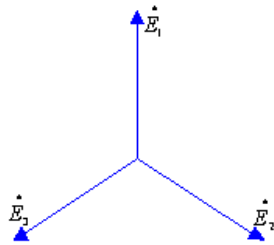


fig.2



e costituiscono una terna simmetrica, dove per terna simmetrica s'intende una terna di tensioni rappresentata da tre vettori uguali a 120° che si susseguono in senso ciclico orario o diretto, questa è rappresentata in fig.2. Quanto illustrato è il principio di funzionamento dei generatori (alternatori) trifase, i sistemi usati dall'ENEL per produrre e distribuire l'energia elettrica sono

trifase, ed è questo il motivo per cui tali sistemi sono di fondamentale importanza, per quello detto la terna di tensioni generata dall'ENEL è sempre simmetrica, noi ci occuperemo comunque anche di terne non simmetriche. Il principale motivo per cui la corrente elettrica viene prodotta sotto forma di corrente alternata risiede nel fatto che questa è suscettibile di essere trasformata da bassa ad alta tensione e viceversa con una macchina particolarmente semplice e di alto rendimento quale è il trasformatore, la necessità di far questo è causata dal fatto che si preferisce trasportare l'energia ad alta tensione per ridurre le perdite in linea, infatti i conduttori che costituiscono le linee elettriche, come vedremo in seguito, hanno una certa resistenza, e a causa dell'effetto Joule quando vengono attraversati da corrente viene dissipata una certa quantità di potenza, questa è data dalla legge di Joule e dipende

quindi dal quadrato della corrente, a parità di potenza trasmessa la corrente diminuisce al crescere della tensione, da ciò è quindi ovvio che al crescere della tensione diminuiscono le perdite in linea.

Prima di passare allo studio dei circuiti trifase è necessario premettere che se la terna di tensioni $\dot{E}_1 - \dot{E}_2 - \dot{E}_3$ del circuito di fig.3, è simmetrica si dirà che la terna di

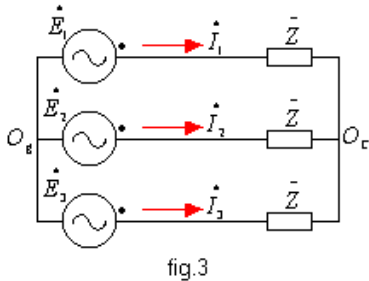


fig.3

correnti $\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3$ è equilibrata se queste sono uguali in modulo e sfasate di 120° in senso ciclico diretto, se la terna di correnti è equilibrata si dirà inoltre che il carico è equilibrato, da cui segue che per carico equilibrato s'intende un sistema formato tra tre impedenze uguali. Nel circuito di figura sia i generatori che le impedenze sono collegate a stella, O_g e O_c sono il centro stella dei

generatori e il centro stella del carico, ci poniamo il problema di determinare le correnti, a tal proposito scriviamo la legge di Ohm generalizzata ai tre rami che uniscono i due centri stella:

$$\dot{V}_{O_c O_g} - \dot{E}_1 = -\bar{Z} \dot{I}_1 \Rightarrow \dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1 - \dot{V}_{O_c O_g}}{\bar{Z}} \quad \text{allo stesso modo} \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_2 - \dot{V}_{O_c O_g}}{\bar{Z}} \quad \dot{I}_3 = \frac{\dot{E}_3 - \dot{V}_{O_c O_g}}{\bar{Z}}$$

il problema si è quindi ridotto alla determinazione di $\dot{V}_{O_c O_g}$, per far questo è possibile

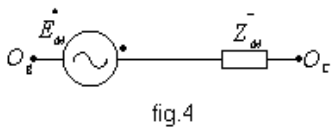


fig.4

applicare il teorema di Millman ottenendo così il circuito aperto di fig.4, applicando la legge di Ohm generalizzata si ha $\dot{V}_{O_c O_g} - \dot{E}_M = 0 \Rightarrow \dot{V}_{O_c O_g} = \dot{E}_M$ (1) calcoliamo la \dot{E}_M :

$$\dot{E}_M = \frac{\frac{\dot{E}_1}{\bar{Z}} + \frac{\dot{E}_2}{\bar{Z}} + \frac{\dot{E}_3}{\bar{Z}}}{\frac{3}{\bar{Z}}} = \frac{\dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dot{E}_3}{3} \quad \text{ma essendo la terna simmetrica si ha } \dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dot{E}_3 = 0$$

da cui segue che $\dot{E}_M = 0$ e quindi dalla (1) $\dot{V}_{O_c O_g} = 0$, è pertanto possibile concludere

che le correnti sono $\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1}{\bar{Z}}$, $\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_2}{\bar{Z}}$ e $\dot{I}_3 = \frac{\dot{E}_3}{\bar{Z}}$, inoltre la conclusione importante a

cui siamo giunti è che in un sistema simmetrico ed equilibrato il centro stella del carico coincide con il centro stella dei generatori. E' quindi ormai evidente che i

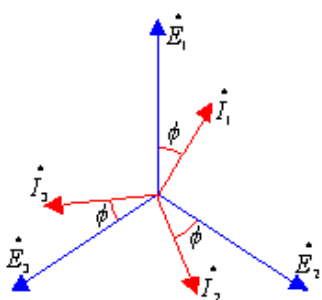


fig.5

sistemi trifase simmetrici ed equilibrati sono caratterizzati dal fatto che la d.d.p. tra i due centri stella è nulla e che la terna di correnti è una terna equilibrata, quest'ultima caratteristica ci suggerisce che per trovare le correnti è sufficiente trovarne una in quanto siamo certi che le altre due sono sfasate di 120° rispetto a questa come mostrato in fig.5, inoltre grazie al risultato ottenuto siamo certi che ogni corrente è sfasata

dello stesso angolo rispetto alla tensione erogata dal generatore relativo alla fase considerata.

Per ruotare un vettore di 120° è possibile applicare l'operatore complesso $\bar{\alpha}$, definito come segue $\bar{\alpha} = e^{-j\frac{2}{3}\pi}$ ovviamente essendo un operatore di rotazione ha modulo unitario, pertanto per indicare una terna costituita da tre tensioni di modulo E è possibile scrivere $\dot{E}_1 = E$, $\dot{E}_2 = \bar{\alpha}^2 \dot{E}_1$ e $\dot{E}_3 = \bar{\alpha} \dot{E}_1$.

E' quindi possibile classificare i sistemi trifase in simmetrici ed equilibrati, simmetrici e squilibrati, dissimmetrici ed equilibrati, e dissimmetrici e squilibrati, una seconda classificazione può essere fatta tra sistema trifase puro RST (o a tre fili) e sistema trifase con neutro RSTN (o a quattro fili), in fig.6 è rappresentato un sistema RSTN equilibrato, ovviamente essendo la d.d.p. tra i due centri stella nulla nel neutro non circola corrente, il sistema RSTN equilibrato è quello che

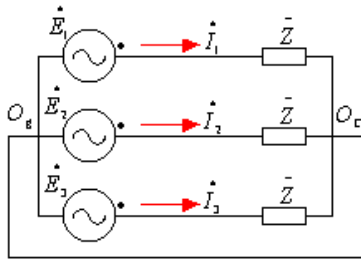


fig.6

in realtà l'ENEL prova a realizzare, non può essere realizzato al cento per cento per il semplice motivo che la società elettrica distribuisce i carichi equamente sulle tre fasi tenendo conto delle potenze nominali installate, perché il carico risulti perfettamente equilibrato è quindi necessario che nelle abitazione, nelle industrie, ecc., si assorba in ogni momento del giorno la massima potenza, questo ovviamente è praticamente impossibile.

Consideriamo il circuito di fig.7 nel quale i generatori erogano una terna simmetrica di tensioni e le impedenze sono connesse a triangolo, cominciamo col dire che in

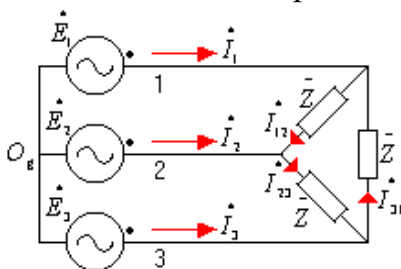


fig.7

generale (sia nel collegamento stella che in quello triangolo) si definiscono tensioni concatenate o tensioni di linea le d.d.p. tra filo e filo $\dot{V}_{12} = \dot{E}_1 - \dot{E}_2$, $\dot{V}_{31} = \dot{E}_3 - \dot{E}_1$ e $\dot{V}_{23} = \dot{E}_2 - \dot{E}_3$, mentre si definiscono tensioni di fase le tensioni a cui sono sottoposte le impedenze, diremo pertanto che nel collegamento stella le tensioni di linea

non coincidono con le tensioni di fase, mentre nel collegamento triangolo le tensioni di linea coincidono con quelle di fase, anche per le correnti è possibile fare la stessa distinzione, esse si diranno di fase se si fa riferimento alle correnti che attraversano le impedenze, si diranno di linea se si fa riferimento alle correnti erogate dai generatori.

Per come sono state definite le tensioni concatenate è immediato capire che i vettori che le rappresentano sono quelli di color rosso rappresentati in

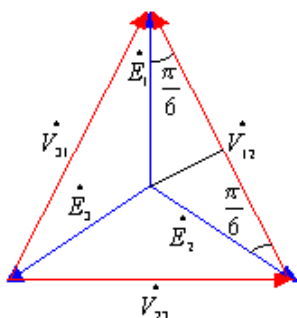


fig.8

fig.8, fissiamo la nostra attenzione sul vettore \dot{V}_{12} , essendo la terna stellata una terna simmetrica l'angolo formato dai vettori \dot{E}_1 ed \dot{E}_2 è $\frac{2}{3}\pi$, ed essendo il triangolo formato dai tre vettori \dot{E}_1 , \dot{E}_2 e \dot{V}_{12} un triangolo isoscele in quanto il modulo di \dot{E}_1 è

uguale a quello di \dot{E}_2 , gli angoli formati dal vettore \dot{V}_{12} con \dot{E}_1 ed \dot{E}_2 devono essere uguali, in particolare essendo la somma degli angoli interni di un triangolo pari a π

devono essere $\frac{\pi - \frac{2}{3}\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$. Come è possibile notare dalla figura l'altezza del triangolo isoscele delimita due triangoli rettangoli, è quindi possibile concludere che $\frac{V_{12}}{2} = E_1 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} E_1 \Rightarrow V_{12} = \sqrt{3} E_1$, abbiamo quindi ottenuto che il modulo dei vettori concatenati è $\sqrt{3}$ volte il modulo dei vettori stellati e la fase è quella del vettore stellato relativo al primo indice più $\frac{\pi}{6}$. I vettori concatenati ammettono infinite terne

stellate, in altre parole esistono infinite terne stellate che hanno come vettori concatenati i lati del triangolo, ma esiste una sola stella per la quale il centro stella coincide con il baricentro del triangolo, il centro stella di una stella equilibrata è sempre baricentrico, in quanto si ha $\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 = \bar{Z}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3)$ ed essendo per l'equazione al nodo $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$ si ha $\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 = 0$, è pertanto necessario fare attenzione al fatto che i discorsi fatti sono validi solo se la terna stellata a cui si fa riferimento è baricentrica. Per il circuito di fig.7 essendo la terna di tensioni erogate dai generatori simmetrica, ed essendo il carico equilibrato, le tensioni concatenate hanno tutte lo stesso modulo, pertanto le correnti di fase \dot{I}_{12} , \dot{I}_{23} e \dot{I}_{31} devono necessariamente avere lo stesso modulo, dall'equazione al nodo relativo al conduttore uno si ha $\dot{I}_1 = \dot{I}_{12} - \dot{I}_{31}$ da cui, con gli stessi ragionamenti fatti prima, segue che la corrente di linea è $\sqrt{3}$ volte quella di fase, ed è inoltre sfasata di un angolo pari a $\frac{\pi}{6}$

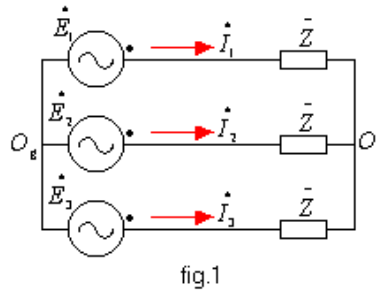
in ritardo rispetto alla \dot{I}_{12} . Riepilogando si ha:

$$\text{collegamento a stella} \Rightarrow \begin{cases} \dot{V}_l = \sqrt{3} \dot{V}_f e^{j\frac{\pi}{6}} \\ \dot{I}_l = \dot{I}_f \end{cases} \quad \text{collegamento a triangolo} \Rightarrow \begin{cases} \dot{V}_l = \dot{V}_f \\ \dot{I}_l = \sqrt{3} \dot{I}_f e^{-j\frac{\pi}{6}} \end{cases}$$

i risultati ottenuti valgono anche per le connessioni dei generatori.

Potenza nei sistemi simmetrici ed equilibrati

Consideriamo il sistema simmetrico ed equilibrato rappresentato in fig.1, le espressioni istantanee delle tensioni e delle correnti sono:



$$\begin{cases} e_1 = E_M \sin(\omega t) \\ e_2 = E_M \sin(\omega t - \frac{2}{3}\pi) \\ e_3 = E_M \sin(\omega t - \frac{4}{3}\pi) \end{cases} \quad \begin{cases} i_1 = I_M \sin(\omega t - \phi) \\ i_2 = I_M \sin(\omega t - \phi - \frac{2}{3}\pi) \\ i_3 = I_M \sin(\omega t - \phi - \frac{4}{3}\pi) \end{cases}$$

ricordando al solito la formula $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ e che $E_M = \sqrt{2}E$, $I_M = \sqrt{2}I$, le potenze istantanee erogate dai tre generatori sono:

$$\begin{cases} p_1 = e_1 i_1 = E_M I_M \sin(\omega t) \sin(\omega t - \phi) = E_M I_M \frac{1}{2} [\cos\phi - \cos(2\omega t - \phi)] = EI \cos\phi - EI \cos(2\omega t - \phi) \\ p_2 = e_2 i_2 = E_M I_M \sin(\omega t - \frac{2}{3}\pi) \sin(\omega t - \phi - \frac{2}{3}\pi) = EI \cos\phi - EI \cos(2\omega t - \phi - \frac{4}{3}\pi) \\ p_3 = e_3 i_3 = E_M I_M \sin(\omega t - \frac{4}{3}\pi) \sin(\omega t - \phi - \frac{4}{3}\pi) = EI \cos\phi - EI \cos(2\omega t - \phi - \frac{8}{3}\pi) \end{cases}$$

per trovare la potenza istantanea complessiva bisogna sommare le singole potenze:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 = 3EI \cos\phi - EI \left[\cos(2\omega t - \phi) + \cos(2\omega t - \phi - \frac{4}{3}\pi) + \cos(2\omega t - \phi - \frac{8}{3}\pi) \right] \quad \text{ma}$$

essendo $\cos(2\omega t - \phi) + \cos(2\omega t - \phi - \frac{4}{3}\pi) + \cos(2\omega t - \phi - \frac{8}{3}\pi) = 0$ si ha

$p = 3EI \cos\phi = 3V_f I_f \cos\phi$ (abbiamo usato tensione e corrente di fase per porci nel caso più generale possibile) ciò significa che la potenza istantanea è costante, questo vuol dire anche che la potenza fluttuante complessiva è nulla (attenzione che la potenza fluttuante in una fase non è nulla), essendo la potenza attiva definita come il valor medio della potenza istantanea si ha $P = p = 3V_f I_f \cos\phi$ (1), il fatto che in un sistema la potenza fluttuante complessiva sia nulla mi garantisce che il sistema sia simmetrico ed equilibrato. Vogliamo far vedere adesso che la potenza attiva è indipendente dal tipo di collegamento, o per meglio dire la formula da applicare è sempre la stessa, sappiamo che nel collegamento stella si ha $V_f = \frac{V_l}{\sqrt{3}}$ e $I_f = I_l$, sostituendo queste nella

(1) si ha $P = 3V_f I_f \cos\phi = 3 \frac{V_l}{\sqrt{3}} I_l \cos\phi = \sqrt{3} V_l I_l \cos\phi$, nel collegamento triangolo $V_f = V_l$

e $I_f = \frac{I_l}{\sqrt{3}}$, sostituendo nella (1) $P = 3V_f I_f \cos\phi = 3V_l \frac{I_l}{\sqrt{3}} \cos\phi = \sqrt{3} V_l I_l \cos\phi$. Per analogia

si definisce potenza reattiva la quantità $Q = \sqrt{3} V_l I_l \sin\phi$, e potenza apparente

$S = \sqrt{3} V_l I_l$, infine il fattore di potenza al solito è $f.d.p. = \frac{P}{S} = \cos\phi$ in questo caso, di

sistema simmetrico ed equilibrato, il fattore di potenza coincide con il coseno dell'angolo di sfasamento che si ha tra tensione e corrente di fase, ma in generale come vedremo esso coincide con il coseno di un angolo che rappresenta l'angolo di cui è necessario ruotare la stella di correnti per avere il sistema in massima potenza attiva.

Misura di potenze

Prima di parlare della misura di potenze è necessario spendere qualche parola sullo strumento mediante il quale ciò può essere fatto, questo strumento che prende il nome



fig.2

wattmetro è costituito da due bobine, una voltmetrica e l'altra amperometrica, infatti sappiamo che per la misura della potenza è necessario conoscere tensione e corrente, lo strumento non fa altro che il prodotto scalare tra tensione e corrente (il varmetro che è lo strumento per la misura delle potenze reattive fa il prodotto vettoriale). Per quello detto, il wattmetro è costituito da quattro morsetti,

ovviamente due sono quelli amperometri e gli altri due quelli voltmetrici, l'inserzione di questo strumento, come mostrato in fig.2, va fatta collegando la bobina amperometrica in serie (in modo tale che sia attraversata dall'intera corrente del circuito del quale si vuole misurare la potenza), e la bobina voltmetrica in parallelo (in modo tale che sia sottoposta alla stessa tensione a cui è sottoposto il circuito del quale si vuole misurare la potenza). Ovviamente affinché lo strumento sia preciso è necessario che la bobina amperometrica abbia un'impedenza piccola (come per gli amperometri), e quella voltmetrica un'impedenza grande (come per i voltmetri), il wattmetro ideale ha ovviamente un'impedenza amperometrica nulla e un'impedenza voltmetrica infinita.

Supponiamo adesso di voler misurare la potenza attiva nel circuito di fig.3, per far questo si potrebbe pensare di utilizzare tre wattmetri, inserendone uno per fase e sommando le tre letture, procedendo in tal modo il risultato che si otterrebbe è:

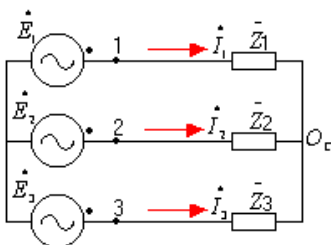


fig.3

$$P = \dot{V}_1 \cdot \dot{I}_1 + \dot{V}_2 \cdot \dot{I}_2 + \dot{V}_3 \cdot \dot{I}_3 \quad (1) \quad \text{essendo } \dot{I}_2 = -\dot{I}_1 - \dot{I}_3 \quad (2) \quad \text{si ha}$$

$$P = \dot{V}_1 \cdot \dot{I}_1 + \dot{V}_2 \cdot (-\dot{I}_1 - \dot{I}_3) + \dot{V}_3 \cdot \dot{I}_3 = (\dot{V}_1 - \dot{V}_2) \cdot \dot{I}_1 + (\dot{V}_3 - \dot{V}_2) \cdot \dot{I}_3 \quad \text{ma}$$

ricordando che $\dot{V}_1 - \dot{V}_2$ e $\dot{V}_3 - \dot{V}_2$ non sono altro che le tensioni concatenate \dot{V}_{12} e \dot{V}_{32} si ha

$$P = \dot{V}_{12} \cdot \dot{I}_1 + \dot{V}_{32} \cdot \dot{I}_3, \quad \text{da ciò si vede}$$

quindi che per misurare la potenza attiva nel sistema di fig.3 sono sufficienti due wattmetri connessi come mostrato in fig.4, in questo caso si dice che si fa centro stella sulla fase due, ovviamente è possibile fare centro stella su qualunque fase, e per

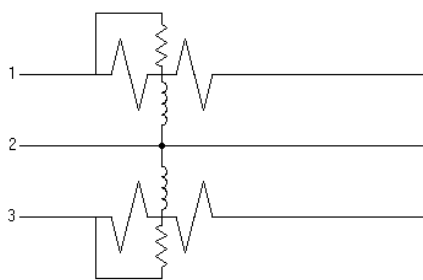


fig.4

vederlo basta trovare dalla (2) la \dot{I}_1 o la \dot{I}_3 e sostituirla nella (1). Il tipo di inserzione che abbiamo visto è possibile fare per la misura della potenza attiva, prende il nome di inserzione Aron, la quale in generale ci permette con n-1 wattmetri di misurare la potenza attiva in un sistema ad n fili, e allo stesso modo con n-1 varmetri la potenza reattiva.

Supponiamo di avere adesso un sistema simmetrico ed equilibrato, vogliamo far vedere che in questo caso sono sufficienti due wattmetri per misurare sia potenza attiva che reattiva, immaginiamo di inserire i wattmetri anche questa volta come mostrato in fig.4, in tale situazione, tenendo conto del diagramma mostrato in fig.5, le due misure sono:

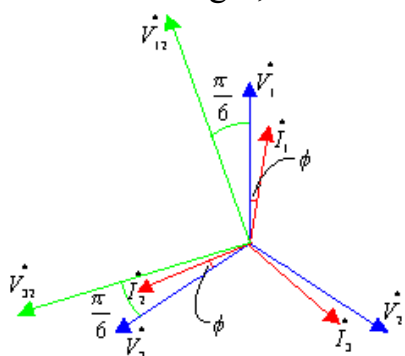


fig.5

$$W_1 = \dot{V}_{12} \cdot \dot{I}_1 = V_{12} I_1 \cos\left(\frac{\pi}{6} + \phi\right) = V_{12} I_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \phi - V_{12} I_1 \frac{1}{2} \sin \phi$$

$$W_2 = \dot{V}_{32} \cdot \dot{I}_3 = V_{32} I_3 \cos\left(\frac{\pi}{6} - \phi\right) = V_{32} I_3 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \phi + V_{32} I_3 \frac{1}{2} \sin \phi$$

ma tenendo conto che $V_{12} = V_{32} = V_l$ e $I_1 = I_3 = I_l$, sommando si ottiene:

$$W_1 + W_2 = \sqrt{3} V_l I_l \cos \phi \quad (a), \quad \text{sottraendo invece}$$

$$W_1 - W_2 = V_l I_l \sin \phi \Rightarrow \sqrt{3}(W_1 - W_2) = \sqrt{3} V_l I_l \sin \phi \quad (b), \quad \text{in}$$

precedenza è stato dimostrato che per questo tipo di

sistemi la (a) rappresenta la potenza attiva e la (b) la potenza reattiva. Abbiamo quindi ottenuto il risultato che cercavamo, siamo cioè riusciti a dimostrare che con due wattmetri in un sistema simmetrico ed equilibrato è possibile misurare sia la potenza attiva sia la potenza reattiva, da quanto ottenuto si ha inoltre un buon metodo per verificare se un sistema è o no simmetrico ed equilibrato, dato un sistema a tre fili basta infatti inserire in Aron due wattmetri facendo centro stella su una qualunque delle tre fasi, una volta lette le misura è possibile trovare la potenza reattiva dalla (b), infine basta prendere due varmetri e misurare, sempre mediante inserzione Aron, la potenza reattiva, se questa coincide con la (b) si ha la certezza che il sistema è simmetrico ed equilibrato.

Comunque per quello detto dati due wattmetri e due varmetri è possibile misurare potenza complessa $\bar{S} = P + jQ$ in qualunque sistema trifase, diciamo quindi che dati due complessimetri (strumento che in realtà non esiste in quanto insieme di un wattmetro e di un varmetro) è possibile misurare la potenza complessa.

Campo magnetico rotante o di Galileo Ferraris

Il principale motivo per cui l'ENEL distribuisce l'energia elettrica tramite sistemi trifase, consiste proprio nel fatto che solo con questo tipo di sistemi è possibile

produrre il cosiddetto campo magnetico rotante, quest'ultimo è necessario per il funzionamento dei motori asincroni, i quali rappresentano la categoria più diffusa di

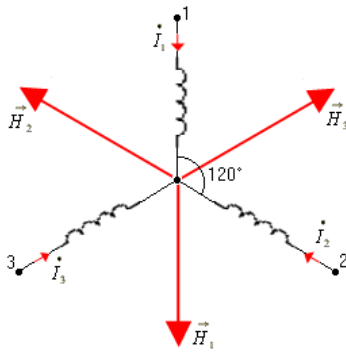


fig.1

motori elettrici industriali. Immaginiamo di collegare a stella, come mostrato in fig.1, tre avvolgimenti disposti in modo tale che gli angoli formati da essi siano di 120° , supponiamo che i tre avvolgimenti siano uguali, ovvero di stesso numero di spire, di stessa lunghezza, e quindi di stessa induttanza, immaginiamo inoltre di applicare ad essi una terna simmetrica di tensioni, ovviamente essendo il carico equilibrato la terna di correnti sarà simmetrica, in altre parole le correnti saranno uguali in ampiezza ma sfasate di 120° , sappiamo che parallelamente ad un solenoide

attraversato da corrente nasce un campo magnetico, pertanto nel nostro caso come mostrato in figura parallelamente ad ognuno degli avvolgimenti nascerà un campo. Per i vettori rappresentativi dei campi non è stato utilizzato il puntino, ma la freccetta

in quanto questa volta si tratta di vettori fisici, se ricordiamo la relazione $H = \frac{NI}{l}$ (1),

essendo in questo caso la corrente variabile nel tempo, anche il campo lo sarà, pertanto prendendo la corrente i_1 come riferimento si ha $i_1 = I_M \sin(\omega t)$, quindi per la

(1) $H_1 = \frac{NI_M}{l} \sin(\omega t)$ si ha quindi che $H_M = \frac{NI_M}{l}$, è necessario però fare attenzione al

fatto che i campi non ruotano, infatti essi si mantengono istante per istante paralleli agli avvolgimenti, essendo le correnti sfasate di 120° gradi nel tempo anche i campi lo saranno (stiamo parlando di sfasamento in ampiezza), si ha cioè

$H_2 = \frac{NI_M}{l} \sin(\omega t - \frac{2}{3}\pi)$ e $H_3 = \frac{NI_M}{l} \sin(\omega t - \frac{4}{3}\pi)$. Avendo visto che le ampiezze dei tre

campi che si vengono a formare sono sfasate nel tempo di 120° , è possibile concludere che la loro somma non è mai nulla, vogliamo far vedere che la somma è un vettore di ampiezza costante, che ruota in senso orario rispetto al sistema che lo genera ad una velocità pari ad ω , dove ω è la pulsazione delle tensioni applicate.

Introducendo un sistema di riferimento di origine il primo estremo dei tre vettori, e osservando che \vec{H}_2 ed \vec{H}_3 formano un angolo di $\frac{\pi}{6}$ con l'asse orizzontale è possibile

scrivere :

$$\begin{cases} \vec{H}_1 = -H_M \sin(\omega t) \hat{e}_2 \\ \vec{H}_2 = -H_M \sin(\omega t - \frac{2}{3}\pi) \cos \frac{\pi}{6} \hat{e}_1 + H_M \sin(\omega t - \frac{2}{3}\pi) \sin \frac{\pi}{6} \hat{e}_2 \\ \vec{H}_3 = H_M \sin(\omega t - \frac{4}{3}\pi) \cos \frac{\pi}{6} \hat{e}_1 + H_M \sin(\omega t - \frac{4}{3}\pi) \sin \frac{\pi}{6} \hat{e}_2 \end{cases} \quad \text{ricordando a questo punto}$$

che $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ e sommando i tre vettori si ottiene

$$\vec{H}_r = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \vec{H}_3 = H_M \cos \frac{\pi}{6} \left[\sin(\omega t) \left(\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) - \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) \right) + \cos(\omega t) \left(\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) - \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) \right) \right] \hat{e}_1 +$$

$$+ H_M \left\{ -\sin(\omega t) + \sin \frac{\pi}{6} \left[\sin(\omega t) \left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) \right) + \cos(\omega t) \left(-\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) - \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) \right) \right] \right\} \hat{e}_2$$

essendo $\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) - \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 0$, $\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) - \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \sqrt{3}$, $\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -1$ e $-\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) - \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = 0$, è possibile concludere che $\vec{H}_r = \frac{3}{2} H_M (\cos(\omega t) \hat{e}_1 - \sin(\omega t) \hat{e}_2)$,

dal risultato ottenuto è possibile notare che \vec{H}_r è un vettore di modulo costante pari a $\frac{3}{2} H_M$, inoltre che l'angolo che tale vettore forma con l'asse di riferimento dipende dal tempo, in particolare è pari ad ωt , da quanto detto segue che il vettore risultante ruota ad una velocità angolare pari ad ω , inoltre è possibile notare che il senso di rotazione è quello orario, se come sistema di riferimento prendiamo il piano complesso, il campo magnetico rotante assume la forma $\vec{H}_r = \frac{3}{2} H_M e^{j\omega t}$.

Supponiamo adesso di avere due campi sfasati di 90° nello spazio e nel tempo, quello che si ottiene è una sorta di campo magnetico rotante, il modo di sfasare due campi di 90° nello spazio è ovviamente quello di porre due avvolgimenti in modo tale che l'angolo che essi formano sia di 90° , per quanto riguarda lo sfasamento temporale è necessario che le correnti nei due avvolgimenti siano sfasate di 90° , questo è il principio secondo il quale funzionano i motori monofase, il modo di sfasare una delle due correnti di 90° , è quello di porre un grosso condensatore in serie ad uno dei due avvolgimenti, si capisce che tanto più grande è la capacità del condensatore tanto più lo sfasamento della corrente si avvicina a 90° .

Motore Asincrono

I motori asincroni rappresentano la categoria più diffusa di motori elettrici industriali, il loro principio di funzionamento deriva da una diretta applicazione del campo magnetico rotante. Le principali parti di questa macchina, sono lo statore ed il

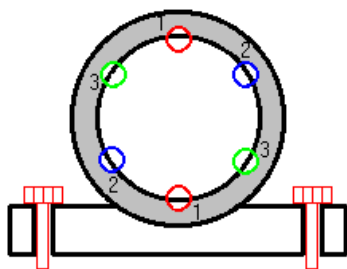


fig.1

rotore, lo statore è rappresentato in fig.1, possiamo immaginare questo come un cilindro cavo sul quale vengono disposti tre avvolgimenti a 120° , come visto precedentemente se questi vengono alimentati con una terna simmetrica di tensioni, le correnti che circolano in essi costituiscono una terna equilibrata, inoltre sono sfasate di 120° , la conseguenza di ciò è come visto la generazione del campo magnetico rotante. Il rotore è invece un cilindro

pieno sul quale vengono sistemati altri tre avvolgimenti a 120° nello spazio, questo nei motori asincroni, è libero di ruotare all'interno della cavità statorica in posizione

perfettamente centrata, grazie al fatto che sull'asse solidale ad esso vengono calettati due cuscinetti a loro volta sostenuti da due supporti solidali allo statore. Gli avvolgimenti del rotore subiranno ovviamente l'influenza del campo magnetico rotante, infatti il campo li taglierà, inducendo in essi una f.e.m.i., se gli avvolgimenti sono chiusi oltre alla nascita della f.e.m.i. si assisterà alla circolazione di corrente, le correnti che si inducono sono a 120° nel tempo, è quindi possibile concludere che anche il rotore genera un campo magnetico rotante che prende appunto il nome di campo magnetico rotante di rotore, questo ruota ad una velocità angolare ω_r rispetto al rotore che è pari alla pulsazione

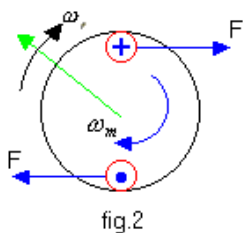


fig.2

delle grandezze rotoriche stesse. E' noto che su un conduttore attraversato da corrente immerso in un campo magnetico, agisce una forza elettrodinamica, è quindi chiaro che sui conduttori che costituiscono gli avvolgimenti del rotore agiscono delle forze, ma se consideriamo una spira è possibile osservare, come mostrato anche in fig.2, che la forza risultante è nulla, ma questa è una coppia di forze di braccio non nullo, pertanto questa coppia esercita un momento meccanico che tende a far ruotare il rotore. Grazie alle osservazioni fatte è quindi possibile concludere che l'effetto del campo magnetico rotante di statore è quello di mettere in rotazione il rotore, la coppia che agisce sul rotore sarà nulla quando la velocità meccanica di questo ω_m sarà pari alla velocità del campo magnetico rotante, questo non avverrà mai a causa degli attriti che tendono a rallentare il rotore permettendo di nuovo il rafforzamento della coppia. Il legame tra velocità del campo magnetico di statore ω_s , campo magnetico di rotore ω_r , e velocità meccanica del rotore ω_m , è espresso dalla relazione $\omega_r = \omega_s - \omega_m$ (1), ricordiamo che le velocità del campo di statore e di rotore sono anche le pulsazioni

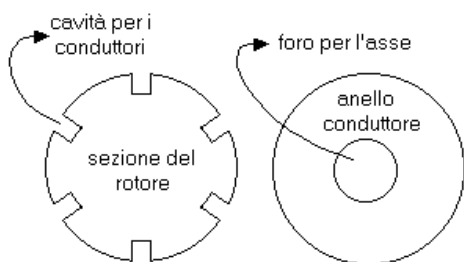


fig.3

delle grandezze statoriche e rotoriche. E' possibile notare che i campi magnetici di rotore e di statore ruotano alla stessa velocità rispetto ad un osservatore fisso, infatti il campo di rotore ruota alla velocità ω_s , mentre quello di statore alla velocità $\omega_m + \omega_r$, per la (1) è quindi possibile concludere che le velocità sono uguali. Gli avvolgimenti sul rotore non vengono solitamente realizzati con il classico filo di rame isolato con vernice trasparente, per esempio nel rotore a gabbia di scoiattolo mostrato in fig.3 vengono ricavate delle cave longitudinali entro le quali vengono introdotte delle sbarre conduttrici le cui testate sporgenti da una parte e dall'altra del circuito rotorico sono collegate fra loro per mezzo di due anelli del tipo mostrato in fig.3, esistono comunque anche motori a rotore avvolto adatti per potenze molto elevate.

Il motore asincrono è una macchina che può funzionare da:

- variante di frequenza, infatti imponendo la velocità del rotore per la (1) è possibile regolare la pulsazione delle grandezze rotoriche e quindi la frequenza, ovviamente per poter essere utilizzato in questo modo è necessario che sia possibile prelevare le

grandezze rotoriche, questo è possibile nei motori a rotore avvolto grazie all'utilizzo dei contatti striscianti (comunemente chiamati spazzole) su degli anelli solidali al rotore;

- trasformatore, per questo tipo di funzionamento è necessario che le grandezze rotoriche abbiano la stessa frequenza delle grandezze statoriche, e quindi che il rotore sia bloccato, infatti in questo caso essendo $\omega_m = 0$ per la (1) si ha $\omega_r = \omega_s$, anche in questo caso le grandezze rotoriche vengono prelevate tramite contatti striscianti;
- variante di fase, in questo caso è sufficiente bloccare il rotore in una particolare posizione ed ottenere sul rotore una f.e.m. con sfasamento legato alla posizione di bloccaggio;
- freno, infatti basta immaginare una coppia esterna opposta a quella indotta dal campo di statore.

L'alternatore è una macchina sincrona nella quale si alimenta il rotore in corrente continua e si mette in rotazione ad una velocità angolare coincidente con la pulsazione che si vuole abbiano le f.e.m. da produrre, il fenomeno dell'induzione avviene grazie alla rotazione (dovuta al movimento meccanico) del campo magnetico costante generato nel rotore.

Sistemi trifase dissimetrici e squilibrati

Consideriamo il circuito di fig.1, supponiamo che la terna di tensioni sia

$$\begin{cases} e_1 = E_{M1} \sin(\omega t + \psi_1) \\ e_2 = E_{M2} \sin(\omega t + \psi_2) \\ e_3 = E_{M3} \sin(\omega t + \psi_3) \end{cases} \quad \text{cioè una terna dissimetrica ma}$$

comunque costituita da tensioni isofrequenziali, supponiamo inoltre che il carico sia squilibrato. In questo caso non è possibile mettere in relazione correnti e tensioni di linea e di fase, possiamo però continuare ad

essere certi che le grandezze di linea costituiscono delle terne pure, cioè la loro somma è zero, infatti per quanto riguarda le correnti questa certezza deriva dalla legge al nodo, per quanto riguarda invece le tensioni dal fatto che i vettori che le rappresentano formano un triangolo e quindi la somma vettoriale è nulla, è necessario comunque fare attenzione al fatto che quanto detto è vero solo per i sistemi a tre fili, infatti per i sistema a quattro fili la legge di Kirchhoff al nodo non esprime più il fatto che la somma delle correnti di linea è nulla, per quanto riguarda le tensioni concatenate possiamo continuare ad essere certi che la loro somma è nulla. Per trovare le correnti nel circuito di fig.1, essendo O_c e O_g non baricentrici si ha

$V_{O_c O_g} \neq 0$, la cosa migliore da fare è quella di applicare Millman, trovare quindi la $V_{O_c O_g}$ e applicando la legge di Ohm generalizzata ai tre

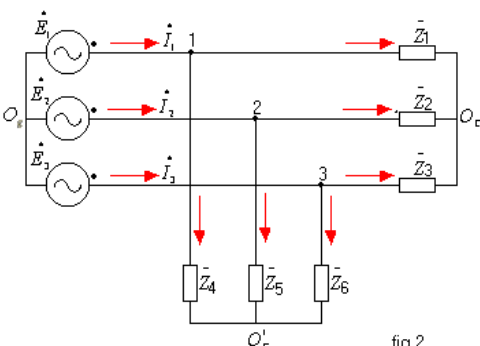


fig.2

rami che uniscono i due nodi trovare le tre correnti di linea. Consideriamo adesso il circuito mostrato in fig.2, supponiamo di voler trovare alcune o tutte le correnti, è possibile procedere in due modi, il primo consiste nel verificare se le due stelle risultano in parallelo (cioè se è verificata una delle tre condizioni viste quando è stato trattato il collegamento stella triangolo), ovvero se $V_{O_c O'_c} = 0$, quindi nel trovare la stella equivalente, una volta fatto ciò è possibile procedere come per il circuito di

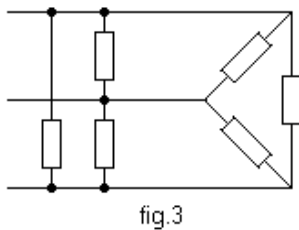
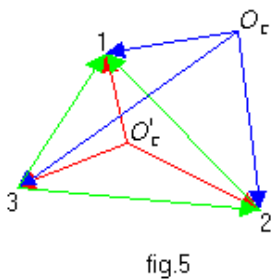
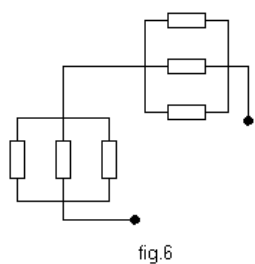


fig.1. Se invece non è possibile fare il parallelo tra le due stelle, conviene trasformare le stelle in triangoli ottenendo quanto mostrato in fig.3, in modo tale da poter fare il parallelo ed ottenere un unico triangolo, fatto ciò note le tensioni concatenate è possibile trovare le correnti di fase e quindi, tramite le equazioni ai nodi, le correnti di linea erogate dai generatori, se volessi calcolare semplicemente le correnti in una delle stelle basterebbe seguire lo stesso ragionamento per la stella in questione. Per



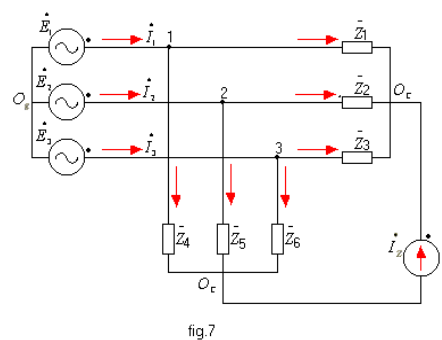
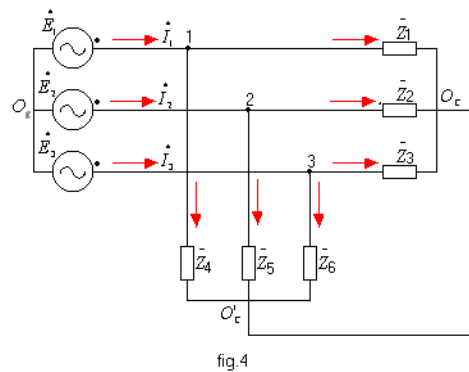
quanto riguarda invece il circuito di fig.4, è possibile affermare che le due stelle sono in parallelo, ma attenzione che il centro stella della stella equivalente non coincide con nessuno dei due centri stella, in altre parole l'effetto del cortocircuito è quello di squilibrare il sistema e far convergere i due centri stella in un altro punto, ovviamente la condizione che è necessario sia rispettata è che le tensioni concatenate restino invariate come mostrato in fig.5, cioè il triangolo delle tensioni concatenate non cambi. Un altro caso è quello in cui il cortocircuito si estende anche al centro stella dei generatori, anche in questo caso i centri stella dei



carichi vanno a coincidere, la differenza è che questa volta il nuovo centro stella è imposto dai generatori, in altre parole si spostano soltanto i centri stella dei carichi e non quello dei generatori. Immaginiamo adesso che il filo che unisce i due centri stella in fig.4 abbia una certa impedenza \bar{Z} , vogliamo vedere come è possibile trovare la corrente

\dot{I}_Z che circola nel filo. La cosa migliore da fare è di applicare Thevenin, infatti tagliando il filo ricadiamo nel caso rappresentato in fig.2 per il quale sappiamo calcolare la $V_{O_c O'_c}$ che in questo caso per noi

rappresenta la tensione di Thevenin, inoltre passivando il circuito si ottiene quanto rappresentato in fig.6, risulta pertanto semplice anche il calcolo dell'impedenza di Thevenin \bar{Z}_{Th} , è pertanto possibile concludere che



$$\dot{I}_Z = \frac{\dot{V}_{Th}}{\bar{Z}_{Th} + \bar{Z}} \quad (\text{attenzione ai segni}), \text{ siamo giunti quindi alla}$$

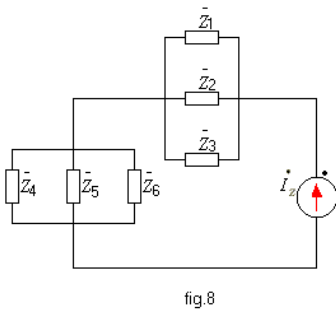


fig.8

conclusione che è possibile sostituire l'impedenza \bar{Z} con un generatore di corrente che eroga la corrente \dot{I}_Z , come mostrato in fig.7. A questo punto per trovare le correnti che circolano nelle stelle è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti, infatti per applicare tale principio sappiamo che è necessario far agire le cause separatamente, in questo caso è quindi necessario far agire

prima i generatori di tensione sostituendo il generatore di corrente con un circuito aperto, e dopo il generatore di corrente sostituendo i generatori di tensione con dei cortocircuiti, nel primo caso otteniamo ancora una volta la configurazione nota di fig.2 che sappiamo risolvere, nel secondo caso si ottiene invece il semplice circuito rappresentato in fig.8.

Terna stellata equivalente

I sistemi simmetrici e squilibrati sono quelli con cui nella realtà si ha a che fare, infatti come è stato accennato precedentemente l'ENEL pur tentandoci non otterrà mai un carico perfettamente equilibrato, vogliamo vedere come in generale sia possibile passare dal collegamento triangolo a quello stella dei generatori. Supponiamo che i generatori siano connessi a triangolo, stiamo supponendo quindi di conoscere le tensioni concatenate, vogliamo trovare i valori che devono avere le tensioni erogate dai generatori di fig.1 affinché tale sistema sia equivalente a quello

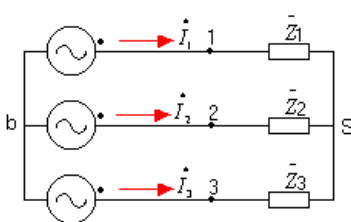


fig.1

di partenza, vogliamo quindi trovare una terna stellata equivalente partendo dal triangolo delle tensioni concatenate, è conveniente scegliere come terna quella baricentrica, ovvero quella che ha come centro stella il baricentro del triangolo delle tensioni concatenate. Supponiamo inoltre che il

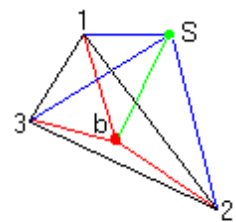


fig.2

centro stella del carico sia un S arbitrario, facendo riferimento alla diagramma vettoriale rappresentato in fig.2 è possibile scrivere

$$\begin{cases} \dot{V}_{bS} + \dot{V}_{S1} = \dot{V}_{1b} \Rightarrow \dot{V}_{bS} = \dot{V}_{1b} + \dot{V}_{1S} \\ \dot{V}_{bS} + \dot{V}_{S2} = \dot{V}_{2b} \Rightarrow \dot{V}_{bS} = \dot{V}_{2b} + \dot{V}_{2S} \\ \dot{V}_{bS} + \dot{V}_{S3} = \dot{V}_{3b} \Rightarrow \dot{V}_{bS} = \dot{V}_{3b} + \dot{V}_{3S} \end{cases} \quad \text{sommando membro a membro queste tre relazioni si}$$

ottiene $3\dot{V}_{bS} = \dot{V}_{1b} + \dot{V}_{2b} + \dot{V}_{3b} + \dot{V}_{1S} + \dot{V}_{2S} + \dot{V}_{3S}$, ma essendo la terna baricentrica

$\dot{V}_{1b} + \dot{V}_{2b} + \dot{V}_{3b} = 0$ si ha pertanto $3\dot{V}_{bs} = \dot{V}_{1s} + \dot{V}_{2s} + \dot{V}_{3s} \Rightarrow \dot{V}_{bs} = \frac{\dot{V}_{1s} + \dot{V}_{2s} + \dot{V}_{3s}}{3}$, essendo S

arbitrario poniamo $S = 1, 2, 3$ si ottiene quindi: $\dot{V}_{b1} = \frac{\dot{V}_{31} - \dot{V}_{12}}{3}$, $\dot{V}_{b2} = \frac{\dot{V}_{32} - \dot{V}_{21}}{3}$ e

$\dot{V}_{b3} = \frac{\dot{V}_{23} - \dot{V}_{31}}{3}$. Siamo quindi giunti alla conclusione che al sistema costituito da i tre

generatori collegati a triangolo, cui corrisponde le tensioni concatenate $\dot{V}_{12}, \dot{V}_{23}, \dot{V}_{31}$, è equivalente il sistema costituito da i tre generatori collegati a stella che erogano la terna di tensioni $\dot{V}_{b1}, \dot{V}_{b2}, \dot{V}_{b3}$.

Teorema di Aron e potenza nei sistemi dissimetrici e squilibrati

Supponiamo di avere il sistema con due carichi di fig.1, vogliamo dimostrare il teorema di Aron, secondo il quale la potenza è invariante rispetto al centro stella, in altre parole la potenza calcolate rispetto al centro stella S coincide con la potenza

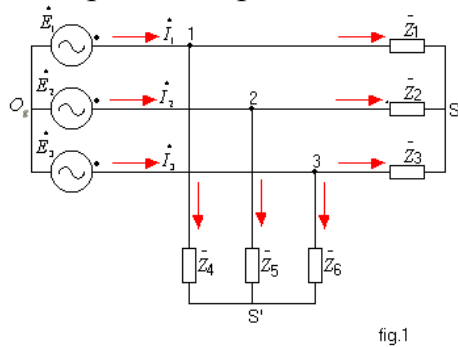


fig.1

calcolata rispetto al centro stella S'. Ricordando come è definita la potenza attiva è possibile scrivere

le relazioni
$$\begin{cases} P_S = \dot{V}_{1s} \cdot \dot{I}_1 + \dot{V}_{2s} \cdot \dot{I}_2 + \dot{V}_{3s} \cdot \dot{I}_3 \\ P_{S'} = \dot{V}_{1s'} \cdot \dot{I}_1 + \dot{V}_{2s'} \cdot \dot{I}_2 + \dot{V}_{3s'} \cdot \dot{I}_3 \end{cases} \quad (1)$$
, al solito

possiamo essere certi che le tensioni concatenate formino un triangolo, pertanto facendo

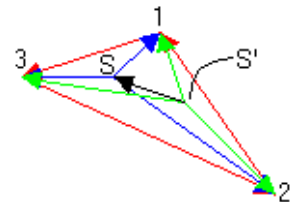


fig.2

riferimento alla fig.2 con qualche semplice osservazione è

possibile concludere che $\dot{V}_{1s'} = \dot{V}_{1s} + \dot{V}_{ss'}$, $\dot{V}_{2s'} = \dot{V}_{2s} + \dot{V}_{ss'}$ e

$\dot{V}_{3s'} = \dot{V}_{3s} + \dot{V}_{ss'}$, sostituendo queste tre relazioni nella (1) si ottiene

$P_{S'} = \dot{V}_{1s} \cdot \dot{I}_1 + \dot{V}_{ss'} \cdot \dot{I}_1 + \dot{V}_{2s} \cdot \dot{I}_2 + \dot{V}_{ss'} \cdot \dot{I}_2 + \dot{V}_{3s} \cdot \dot{I}_3 + \dot{V}_{ss'} \cdot \dot{I}_3 = P_S + \dot{V}_{ss'} \left(\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 \right)$ ma per

l'equazione al nodo O_g si ha $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$, è quindi possibile concludere che $P_{S'} = P_S$, in altre parole che la potenza è invariante rispetto al centro stella, usando il prodotto vettoriale al posto di quello scalare e seguendo lo stesso procedimento si dimostra che la potenza reattiva è invariante rispetto al centro stella.

Dato un carico squilibrato si potrebbe pensare che per la sua riequilibrio è necessaria l'introduzione di impedenze, ovviamente questo non è conveniente a causa del conseguente aumento di potenza dissipata che si avrebbe, questo è il motivo per cui si usano pure induttanze, se per esempio un carico fa circolare una terna inversa di correnti, sicuramente è squilibrato e per la sua riequilibrio è necessario far circolare un'altra terna inversa tramite pure induttanza.

Passiamo al calcolo delle potenze nei sistemi dissimetrici e squilibrati, data la terna dissimetrica di tensioni $e_1 = E_{M1} \sin(\omega t)$, $e_2 = E_{M2} \sin(\omega t - \psi_2)$ e $e_3 = E_{M3} \sin(\omega t - \psi_3)$, se il carico è squilibrato le correnti saranno $i_1 = I_{M1} \sin(\omega t - \phi_1)$, $i_2 = I_{M2} \sin(\omega t - \psi_2 - \phi_2)$ e $i_3 = I_{M3} \sin(\omega t - \psi_3 - \phi_3)$. Al solito per la potenza istantanea attiva complessivamente assorbita dal carico è data dalla somma delle potenze istantanee nelle singole fasi, si ha cioè $p = p_1 + p_2 + p_3$, ricordando al solito la formula $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$, si conclude che la potenza istantanea in ogni

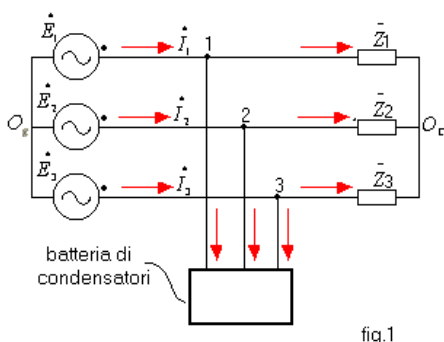
singola fase è:
$$\begin{cases} p_1 = e_1 i_1 = EI \cos \phi_1 - EI \cos(2\omega t - \phi_1) \\ p_2 = e_2 i_2 = EI \cos \phi_2 - EI \cos(2\omega t - 2\psi_2 - \phi_2) \\ p_3 = e_3 i_3 = EI \cos \phi_3 - EI \cos(2\omega t - 2\psi_3 - \phi_3) \end{cases}$$
 facendo la somma e

calcolando il valor medio si ottiene che la potenza attiva è $P = E_1 I_1 \cos \phi_1 + E_2 I_2 \cos \phi_2 + E_3 I_3 \cos \phi_3$, attenzione che questa volta non è come per sistemi simmetrici ed equilibrati nei quali la potenza fluttuando è nulla, infatti la potenza istantanea complessiva non è costante, inoltre per similitudine si definisce potenza reattiva del sistema $Q = E_1 I_1 \sin \phi_1 + E_2 I_2 \sin \phi_2 + E_3 I_3 \sin \phi_3$, ancora si definisce potenza apparente $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$, infine il fattore di potenza è sempre definito come rapporto tra potenza attiva ed apparente $f.d.p. = \frac{P}{S}$ questo fattore di potenza rappresenta il coseno di un particolare angolo, che sarebbe l'angolo di cui è necessario ruotare la stella di correnti per avere il sistema in massima potenza attiva.

Rifasamento nei sistemi trifase

Come visto in precedenza rifasare vuol dire fornire tutta o parte della potenza reattiva necessaria al carico in loco, per i sistemi trifase è possibile rifasare fase per fase, le capacità necessarie per il rifasamento totale sarebbero quindi $C_1 = \frac{L_1}{Z_1^2}$, $C_2 = \frac{L_2}{Z_2^2}$ e

$C_3 = \frac{L_3}{Z_3^2}$, questo però è poco pratico a causa del fatto che avrei bisogno di trovare in



commercio una vastissima gamma di condensatori di diversa capacità, o sarebbe necessario costruirli su ordinazione in industrie artigianali, con conseguenti tempi lunghi e costi elevati. La cosa migliore da fare è quindi di mettere un'unica "scatola nera" come mostrato in fig.1, cioè un carico puramente capacitivo in grado di fornire la potenza reattiva necessaria, senza dover preoccuparsi se all'interno vi è uno o mille condensatori, e se il collegamento è a stella o a

triangolo. Nella realtà i condensatori sono prodotti a taglia e sono connessi in modo

tale che la batteria di condensatori rappresenti un carico equilibrato. Per quanto riguarda il tipo di collegamento (stella o triangolo) si dimostra facilmente che $C_{stella} = 3C_{triangolo}$, da questo risultato essendo la capacità triangolo tre volte più piccola di quella stella, apparentemente sembrerebbe che il collegamento triangolo sia quello più conveniente, in realtà essendo la tensione a cui sono sottoposti i condensatori nel collegamento triangolo più elevata, è necessario spendere di più in termini di isolamento, è comunque importante precisare che a bassa tensione (380 V) dal punto di vista dei costi il peso della capacità è di più rispetto a quello dell'isolamento, le cose si invertono a tensioni più elevate dove conviene quindi il collegamento stella.

Ricordando la formula $tg\phi_r = \frac{Q_{CA} - Q_{cond}}{P_{CA}} = \frac{Q_g}{P_g}$ (1), dove $Q_{CA}, Q_{cond}, P_{CA}, Q_g, P_g$ sono

rispettivamente la potenza reattiva del carico, la potenza reattiva della batteria di condensatori, la potenza attiva del carico, la potenza reattiva erogata dai generatori e la potenza attiva erogata dai generatori, e supponendo per rendere i calcoli più semplici, che il collegamento del carico e dei condensatori sia a triangolo, e per porci nel caso generale che il sistema sia dissimetrico e squilibrato, si ha che la potenza

reattiva del carico è $Q_{CA} = X_{12} \frac{V_{12}^2}{Z_{12}^2} + X_{23} \frac{V_{23}^2}{Z_{23}^2} + X_{31} \frac{V_{31}^2}{Z_{31}^2}$ (2), la potenza attiva del carico

$P_{CA} = R_{12} \frac{V_{12}^2}{Z_{12}^2} + R_{23} \frac{V_{23}^2}{Z_{23}^2} + R_{31} \frac{V_{31}^2}{Z_{31}^2}$ (3), e la potenza reattiva dei condensatori

$Q_{cond} = \omega C V_{12}^2 + \omega C V_{23}^2 + \omega C V_{31}^2$ (4), sostituendo la (2) la (3) e la (4) nella (1) fissato ϕ_r è possibile calcolare la capacità della batteria di condensatori nel caso più generale di sistema dissimetrico e squilibrato, i casi particolari sono:

- Sistema simmetrico e squilibrato

la (2) diventa $Q_{CA} = V^2 \left(\frac{X_{12}}{Z_{12}^2} + \frac{X_{23}}{Z_{23}^2} + \frac{X_{31}}{Z_{31}^2} \right)$, la (3) $P_{CA} = V^2 \left(\frac{R_{12}}{Z_{12}^2} + \frac{R_{23}}{Z_{23}^2} + \frac{R_{31}}{Z_{31}^2} \right)$ e la (4)

$Q_{cond} = 3\omega C V^2$, sostituendo nella (1) il termine V^2 si semplifica.

- Sistema simmetrico ed equilibrato

la (2), la (3) e la (4) diventano $Q_{CA} = 3 \frac{X}{Z^2} V^2$, $P_{CA} = 3 \frac{R}{Z^2} V^2$ e $Q_{cond} = 3\omega C V^2$,

sostituendo nella (1) è possibile osservare che anche in questo caso V^2 si semplifica.

- Sistema dissimetrico ed equilibrato

in questo caso si ha $Q_{CA} = \frac{X}{Z^2} (V_{12}^2 + V_{23}^2 + V_{31}^2)$, $P_{CA} = \frac{R}{Z^2} (V_{12}^2 + V_{23}^2 + V_{31}^2)$ e

$Q_{cond} = \omega C (V_{12}^2 + V_{23}^2 + V_{31}^2)$, sostituendo nella (1) si semplifica tutta la parentesi $(V_{12}^2 + V_{23}^2 + V_{31}^2)$.

E' pertanto possibile concludere che l'unico caso in cui la capacità dei condensatori di rifasamento dipende dalla variazione di tensione causata dalla loro stessa inserzione, è quello in cui il sistema è dissimetrico e squilibrato.

Nella realtà spesso è necessario rifasare carichi non costanti, ovvero carichi che non assorbono sempre la stessa potenza reattiva, quindi è chiaro che dimensionando la

batteria di condensatori per la potenza reattiva massima in alcuni momenti ci sarebbe un'eccessiva produzione, in questi casi si realizza il cosiddetto rifasamento a gradini, nel quale la potenza totale è suddivisa in più batterie di condensatori da inserire o escludere in funzione della potenza reattiva richiesta nei diversi periodi. La regolazione sarà necessariamente effettuata a gradini, mediante un adeguato inseritore automatico pilotato da uno strumento sensibile alla potenza reattiva e attiva assorbita.

Linee elettriche

Supponiamo di avere una linea elettrica costituita da due fili, ovvero una linea bifilare, come è possibile notare in fig.1 e come è ovvio la corrente nei due conduttori

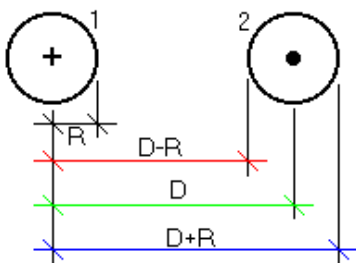


fig.1

ha verso opposto, vogliamo calcolare il coefficiente di autoinduzione della linea, sappiamo per definizione che

$$L = \frac{\phi_{\Sigma}}{I} \quad (1), \text{ in questo caso si ha } \phi_{\Sigma} = \phi_{\Sigma 1} + \phi_{\Sigma 2} \text{ dove } \phi_{\Sigma 1} \text{ e } \phi_{\Sigma 2}$$

sono rispettivamente i flussi totalmente concatenati con la linea e generati dalla corrente circolante nel conduttore uno e da quella circolante nel conduttore due, ma è possibile osservare che per ragioni di simmetria il flusso totalmente

concatenato con la linea e generato dalla corrente che circola nel conduttore uno, è uguale al flusso totalmente concatenato con la linea e generato dalla corrente che circola nel conduttore due, è pertanto possibile scrivere $\phi_{\Sigma} = 2\phi_{\Sigma 1}$, la (1) diventa quindi

$$L = \frac{2\phi_{\Sigma 1}}{I}. \text{ Possiamo adesso al calcolo di } \phi_{\Sigma 1}, \text{ tenendo conto che esso è dato dalla}$$

somma di tre termini $\phi_{\Sigma 1} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$ che sono rispettivamente il flusso parzialmente concatenato con la corrente e con la linea, il flusso totalmente concatenato con la corrente e con la linea, e il flusso totalmente concatenato con la linea e parzialmente concatenato con la corrente.

Calcolo del flusso parzialmente concatenato con la corrente e con la linea

Sappiamo che $d\phi = B dS$ (2) dove $B = \mu H$, per trovare H ricorriamo alla formula di Biot Savart, secondo la quale $H = \frac{I}{l}$, in questo caso vogliamo trovare il campo

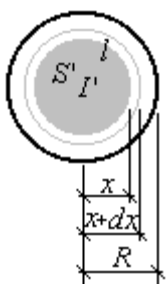


fig.2

internamente al conduttore, a tal proposito consideriamo la linea chiusa di lunghezza l rappresentata in fig.2, che delimita la regione di conduttore di sezione S' ed attraversata dalla corrente I' , per la formula di Biot Savart lungo tale linea si ha quindi $H = \frac{I'}{l}$, nell'ipotesi di densità

di corrente costante è possibile essere certi che $\frac{I'}{l} = \frac{S'}{S} \Rightarrow I' = I \frac{S'}{S} = I \frac{x^2}{R^2}$,

si ha pertanto $H = \frac{Ix^2}{lR^2} = \frac{Ix^2}{2\pi x R^2} = \frac{Ix}{2\pi R^2}$, e quindi dalla (2) si ha che il

flusso elementare è $d\phi_1' = \frac{\mu I x}{2\pi R^2} dS$ tenendo conto che $dS = ldx$ si ha $d\phi_1' = \frac{\mu I x}{2\pi R^2} ldx$ (3),

questo flusso è totalmente concatenato con la corrente I' , ma parzialmente concatenato con la corrente I , possiamo comunque pensare ad un flusso più piccolo che si concatena con l'intera corrente I , deve essere pertanto

$d\phi_1' I' = d\phi_1 I \Rightarrow d\phi_1 = d\phi_1' \frac{I'}{I} = d\phi_1' \frac{S'}{S} = d\phi_1' \frac{x^2}{R^2}$, sostituendo nell'ultima relazione ricavata la

(3) si ottiene $d\phi_1 = \frac{\mu I}{2\pi R^4} x^3 dx$, è quindi possibile concludere che

$$\phi_1 = \int_0^R d\phi_1 = \frac{\mu I}{2\pi R^4} \int_0^R x^3 dx = \frac{\mu I R^4}{8\pi R^4} = \frac{\mu I}{8\pi} \quad (a).$$

Calcolo del flusso totalmente concatenato con la corrente e con la linea

Questa volta applichiamo la formula di Biot Savart per trovare il campo esternamente al conduttore, pertanto è possibile concludere che lungo la circonferenza concentrica al conduttore e di raggio x rappresentata in fig.3, l'intensità di campo è $H = \frac{I}{l} = \frac{I}{2\pi x}$ dove questa volta

I è l'intera corrente che circola nel conduttore, per la (2) si ha quindi $d\phi_2 = \frac{\mu I}{2\pi x} ldx$ dove al solito $ldx = ds$, per cui

$$\phi_2 = \int_R^{D-R} d\phi_2 = \frac{\mu I}{2\pi} \int_R^{D-R} \frac{dx}{x} = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{D-R}{R} \quad (b).$$

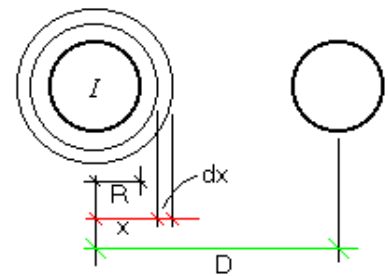


fig.3

Calcolo del flusso totalmente concatenato con la linea e parzialmente con la corrente

Facendo riferimento alla fig.4, considerando la circonferenza di raggio x , applicando la formula di Biot Savart, e procedendo come prima si ottiene che il flusso elementare

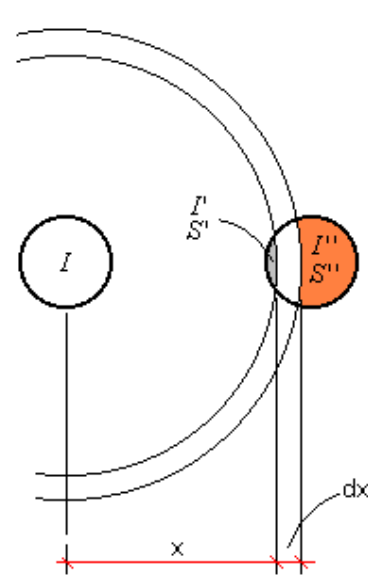


fig.4

è $d\phi_3' = \frac{\mu I}{2\pi x} ldx$, questo è il flusso generato dalla corrente I

che circola nel primo conduttore, e concatenato con la porzione di corrente $I - I'$ che circola nel secondo conduttore, come prima è possibile immaginare $d\phi_3'$ come

un flusso più piccolo che si concatena però con l'intera corrente I che circola nel secondo conduttore, deve essere cioè $d\phi_3' (I - I') = d\phi_3 I$ ma essendo $I - I' = I''$ si ha

$d\phi_3' I'' = d\phi_3 I \Rightarrow d\phi_3 = d\phi_3' \frac{I''}{I}$ (4), inoltre sempre nell'ipotesi di

densità di corrente costante si ha $\frac{I''}{I} = \frac{S''}{S} \Rightarrow I'' = I \frac{S''}{S}$, la (4)

diventa pertanto $d\phi_3 = d\phi_3' \frac{I''}{I} = d\phi_3' \frac{S''}{S} = \frac{\mu I}{2\pi x} \frac{S''}{S} dx$ da cui

$$\text{segue che } \phi_3 = \int_{D-R}^{D+R} d\phi_3 = \frac{\mu I}{2\pi} \int_{D-R}^{D+R} \frac{S''}{S} \frac{dx}{x} \quad (c).$$

A questo punto è possibile concludere che il flusso totalmente concatenato con la linea e generato dal conduttore uno, è dato dalla somma della (a), (b) e (c), cioè

$$\phi_{\Sigma 1} = \frac{\mu I}{8\pi} + \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{D-R}{R} + \frac{\mu I}{2\pi} \int_{D-R}^{D+R} \frac{S''}{S} \frac{dx}{x}, \quad \text{pertanto l'induttanza della linea è}$$

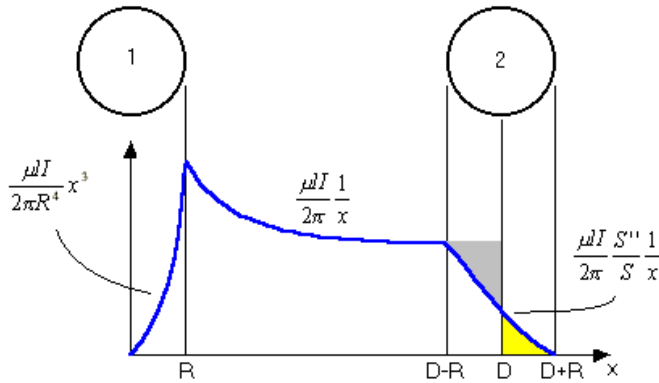


fig.5

matematicamente che l'area del triangolo mistilineo colorato in grigio è uguale all'area del triangolo mistilineo colorato in giallo, pertanto si deduce la seguente

uguaglianza $\int_R^{D-R} d\phi_2 + \int_{D-R}^{D+R} d\phi_3 = \int_R^D d\phi_2$, essendo $\int_R^D d\phi_2 = \frac{\mu I}{2\pi} \int_R^D \frac{dx}{x} = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{D}{R}$, si ha

$$\phi_{\Sigma 1} = \frac{\mu I}{8\pi} + \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{D}{R} \quad \text{pertanto si ha che l'induttanza della linea è } L = \frac{\mu l}{2\pi} \left(\frac{1}{2} + 2 \ln \frac{D}{R} \right).$$

Vediamo adesso come praticamente si fa a tenere conto dell'induttanza di linea,

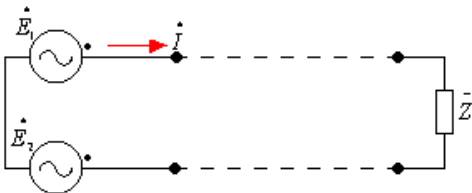


fig.6

supponiamo di avere il circuito di fig.6, il tratto di circuito tratteggiato rappresenta appunto una linea bifilare di lunghezza l , ovviamente per il calcolo dell'induttanza è necessario conoscere il raggio R dei conduttori e la distanza D tra di essi, scegliendo come verso di percorrenza quello orario l'equazione

alla maglia sarà quindi $\dot{E}_1 - \dot{E}_2 + \dot{E}_i = \bar{Z} \dot{I}$, dove \dot{E}_i rappresenta la f.e.m.i. nella maglia

formata dai conduttori di linea, partiamo dal fatto che $\dot{E}_i = -j\omega \dot{\phi}_{\Sigma}$ dove $\dot{\phi}_{\Sigma}$ rappresenta il flusso totalmente concatenato con la maglia, in generale si ha

$$\dot{\phi}_{\Sigma} = \frac{L_{12}}{2} \dot{I} \pm \frac{L_{12}}{2} \dot{I} \quad \text{in questo caso si prende il segno positivo in quanto come è possibile}$$

notare in fig.7 i flussi sono concordi, si ha pertanto

$$\dot{\phi}_{\Sigma} = L_{12} \dot{I}, \quad L_{12} \text{ si calcola con la formula ricavata}$$

$$\text{precedentemente, si ha quindi } L_{12} = \frac{\mu l}{2\pi} \left(\frac{1}{2} + 2 \ln \frac{D}{R} \right).$$



fig.7

Supponiamo adesso che la linea di trasmissione sia a tre fili, come quella mostrata in fig.8, in

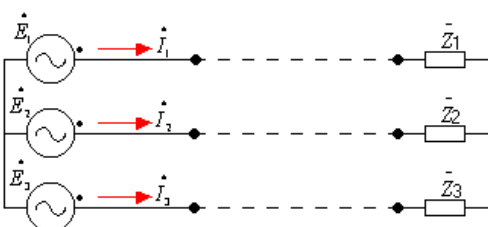


fig.8

questo caso è necessario tenere conto del fatto che su una maglia si concatena il flusso dell'altro conduttore, cioè è necessario tenere conto della mutua induzione, calcoliamo il flusso concatenato con la maglia 1-2:

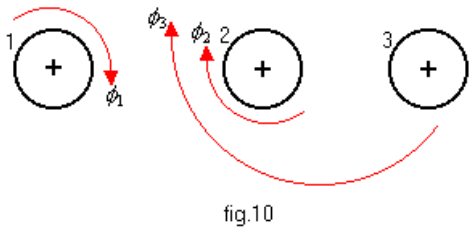


fig.10

$$H = \frac{I_3}{2\pi x} \quad \text{quindi} \quad B = \mu_0 \frac{I_3}{2\pi x} \quad \text{si ha pertanto}$$

$$d\phi_c = BdS = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi x} l dx \quad \text{facendo riferimento alla fig.9,}$$

ricordando che per definizione

$$M_{21} = \frac{\phi_{\Sigma 21}}{i_1}, \quad \text{è}$$

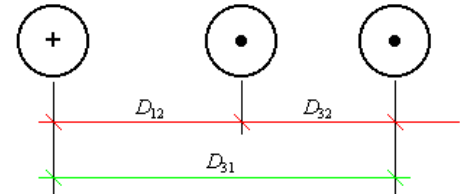


fig.9

possibile concludere che il coefficiente di mutua è

$$M_{3(12)} = \frac{\int_{D_{31}}^{D_{32}} d\phi_c}{I_3} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \int_{D_{32}}^{D_{31}} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{D_{31}}{D_{32}} \quad (\text{bisogna})$$

integrare sempre tra la distanza minore e quella maggiore). Per quanto riguarda il segno della mutua basta ricordare che la mutua è positiva se il flusso di mutua è concorde con il flusso di auto, per esempio nel nostro caso $M_{3(12)}$ è negativa, in quanto, come è possibile notare in fig.10, il flusso generato dalla corrente circolante nel conduttore tre, che si concatena con la maglia 1-2, è discorde al flusso generato dalla corrente uno, bisogna comunque prestare attenzione alla maglia scelta, infatti se la maglia fosse stata la 2-1, la mutua sarebbe stata positiva, in quanto avremmo dovuto confrontare il flusso di mutua con il flusso generato dalla corrente due e non con quello generato dalla corrente uno.

L'equazione alla maglia 1-2 è quindi $\dot{E}_1 - \dot{E}_2 + \dot{E}_{i12} = R_1 \dot{I}_1 + \bar{Z}_1 \dot{I}_1 - \bar{Z}_2 \dot{I}_2$, dove

$$\dot{E}_{i12} = -j\omega \phi_{\Sigma 12} = -j\omega \left(\frac{L_{12}}{2} \dot{I}_1 - \frac{L_{12}}{2} \dot{I}_2 - M_{3(12)} \dot{I}_3 \right), \quad \text{allo stesso modo per le maglie 1-3 e 2-3}$$

si ha $\dot{E}_{i13} = -j\omega \left(\frac{L_{13}}{2} \dot{I}_1 - \frac{L_{13}}{2} \dot{I}_3 - M_{2(13)} \dot{I}_2 \right)$ e $\dot{E}_{i23} = -j\omega \left(\frac{L_{23}}{2} \dot{I}_2 - \frac{L_{23}}{2} \dot{I}_3 + M_{1(23)} \dot{I}_1 \right)$, vale la

pena di far caso al fatto che se fosse stato $D_{12} = D_{23}$ nella maglia 1-3 gli effetti di mutua dovuti alla corrente due sono nulli.

Attenzione che in generale non è possibile schematizzare le impedenze di linea, infatti affinché questo sia possibile è necessario che le induttanze di linea siano tutte

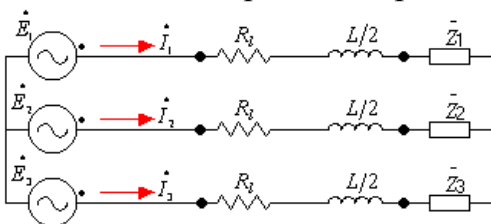


fig.11

uguali, e che le mutue siano nulle, è pertanto necessario che le distanze tra i conduttori siano tutte uguali, e che i conduttori siano disposti ai vertici di un triangolo equilatero, solo in tale situazione è possibile schematizzare le impedenze di linea come illustrato in fig.11.

Transitori

Ricordiamo che si definisce transitorio il periodo di tempo che intercorre nel passaggio da uno stato energetico ad un altro, non è comunque sempre vero che un sistema in seguito ad un transitorio ammetta regime permanente, infatti affinché questo si verifichi è necessario che la rete sia stabile. Come visto precedentemente l'equazione integro differenziale rappresentativa dell'equilibrio elettrico di un circuito RLC è la seguente $v - L \frac{di}{dt} - \int \frac{i}{C} dt = Ri$ (1), che derivata porta ad

un'equazione differenziale del secondo ordine del tipo $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = d$ (2), per trovare il comportamento del sistema è pertanto necessario risolvere tale equazione differenziale. Consideriamo quindi l'omogenea associata alla (2), cioè $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ sappiamo che un'equazione differenziale omogenea di questo tipo ha soluzione generale del tipo $x = K_1 e^{\alpha_1 t} + K_2 e^{\alpha_2 t}$, la soluzione dell'omogenea rappresenta quindi la risposta ad ingresso nullo, in quanto le forzanti sono state poste a zero, ovviamente il sistema si evolve solo se inizialmente possiede energia, in altre parole se le condizioni iniziali sono diverse da zero. I termini α_1 e α_2 hanno le dimensioni di una frequenza, e prendono il nome di frequenze naturali del sistema, inoltre se tali quantità sono negative, o complesse e coniugate con parte reale negativa, il sistema è stabile, in altre parole ammette regime permanente. Per trovare la soluzione della (2) è necessario trovare un integrale particolare, questo rappresenta la risposta a stato zero, dunque la soluzione generale è del tipo $r = r_{i0} + r_{s0}$, con r_{i0} risposta a ingresso nullo, e r_{s0} risposta a stato zero. Un esempio di risposta a stato zero è la carica di un

induttore, infatti precedentemente è stato trovato che $i = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$, dove $\frac{E}{R}$ rappresenta la componente a regime della risposta, mentre il termine $\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$ la componente transitoria, mentre un esempio di risposta ad ingresso nullo è la scarica di un induttore $i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$. Quello visto è quindi un metodo per affrontare lo studio dei

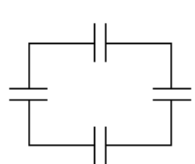
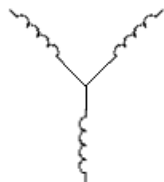


fig.1



potrebbe portare a dire che le frequenze naturali sono tante quanti sono gli elementi reattivi presenti nel circuito, questo non è vero in quanto le condizioni iniziali devono essere linearmente indipendenti, ad esempio le correnti nei tre induttori di fig.1 sono legate dall'equazione al nodo, allo stesso modo le tensioni sui condensatori rappresentati nella stessa figura sono legate

dell'equazione alla maglia. In particolare si ha che il numero di frequenze naturali diverse da zero è pari al numero di elementi reattivi meno il numero di nodi formati

da elementi induttivi e il numero di maglie costituite da condensatori, mentre il numero di frequenze naturali uguali a zero è pari al numero delle maglie formate da induttori più il numero degli insiemi di taglio formati da condensatori.

Abbiamo visto che per studiare il comportamento a regime permanente di un circuito RLC, è possibile utilizzare il calcolo simbolico, che ci permette di ricondurre l'equazione integro differenziale rappresentativa dell'equilibrio elettrico del circuito ad un'equazione algebrica, la stessa cosa può essere fatta per lo studio dei transitori, lo strumento mediante il quale ciò è possibile è la trasformata di Laplace. La legge di

trasformazione secondo Laplace è espressa dalla relazione $F(S) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-St} dt$ dove

$S = \alpha + j\omega$, spesso si dice che $F(S)$ è la L-trasformata di $f(t)$, cioè $F(S) = L[f(t)]$, l'operazione inversa è l'antitrasformazione, questa si indica con L^{-1} si ha quindi

$f(t) = L^{-1}[F(S)]$ ed è espressa dalla relazione $f(t) = \int_{\alpha-j\omega}^{\alpha+j\omega} F(S) \frac{e^{St}}{2\pi j} dS$. Vogliamo quindi

trasformare l'equazione integro differenziale (1) secondo Laplace, consideriamo però il caso generale, cioè il caso in cui le condizioni iniziali del circuito non sono nulle,

in tale situazione pertanto la (1) è $v - L \frac{di}{dt} - \frac{1}{C} \int_0^t idt - v_c(0) = Ri$ (3) dove $v_c(0)$ è la

tensione sul condensatore all'istante iniziale. Prima di L-trasformare la (3) è comunque necessario ricordare che $L\left[L \frac{di}{dt}\right] = SLI(S) - Li_L(0)$, con $i_L(0)$ corrente che

circola nell'induttore all'istante iniziale, e che $L\left[\frac{1}{C} \int idt\right] = \frac{1}{C} \frac{I(S)}{S}$, si ha pertanto che la

trasformata della (3) è quindi $V(S) - SLI(S) + Li_L(0) - \frac{v_c(0)}{S} - \frac{1}{CS} I(S) = RI(S)$, che

scritta in forma diversa diventa $V + Li_L(0) - \frac{v_c(0)}{S} = \left(R + SL + \frac{1}{CS}\right)I$ (4). Alla (4) è

possibile associare un circuito, cioè essa rappresenta l'equilibrio elettrico del circuito

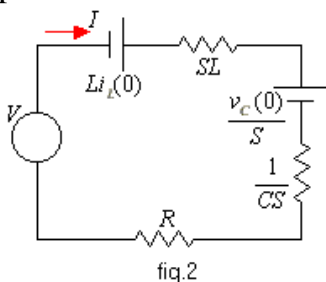


fig.2

mostrato in fig.2, come è possibile notare gli induttori e i condensatori si trasformano nell'insieme di un generatore e di un resistore, per stabilire il verso che devono avere tali generatori è necessario ricordare che questi devono tendere a mantenere lo stato iniziale, per comprendere meglio quanto detto è utile

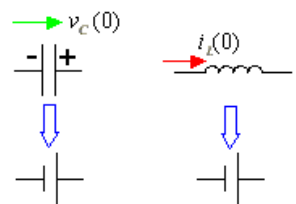


fig.3

dare un'occhiata agli esempi illustrati in fig.3.

Supponiamo adesso che le condizioni iniziali siano nulle, cioè che $v_c(0) = i_L(0) = 0$, in

tale situazione la (4) diventa $V = \left(R + SL + \frac{1}{CS}\right)I$ (5), la quantità $R + SL + \frac{1}{CS}$ è la

funzione di trasferimento, proprio per come essa è definita, infatti basta ricordare che la funzione di trasferimento è la risposta di un sistema all'impulso (si ricordi che la

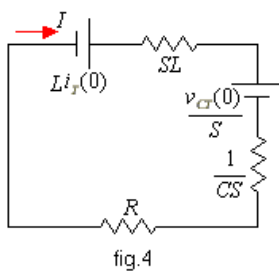
trasformata dell'impulso è 1), per analogia con la legge di Ohm tale quantità prende il nome di impedenza operazionale $Z(S) = R + SL + \frac{1}{CS}$, pertanto la (5) nella forma $V(S) = Z(S)I(S)$ è chiamata legge di Ohm operazionale.

Ovviamente una volta trovata la corrente è necessario antitrasformare per trovare l'espressione della corrente nel dominio del tempo, questo non sempre risulta semplice a causa della presenza della forzante, comunque antitrasformando si ottengono tutte le componenti transitorie e quelle a regime, soltanto che a differenza del caso visto prima (dominio del tempo) in cui si distingueva la risposta a ingresso nullo dalla risposta a stato zero, questa volta non è possibile distinguere le componenti transitorie dovute alla forzante da quelle dovute allo stato iniziale. E' quindi ormai chiaro che questo modo di procedere offre grossi vantaggi, ma ne perde altri offerti dal primo metodo visto, inoltre a volte potrebbe risultare di difficile applicazione a causa della necessità di antitrasformare, per ovviare a tale problema è possibile usare un terzo metodo, chiamato metodo dell'evoluzione libera, che però purtroppo non sempre può essere applicato, infatti è necessario che il circuito ammetta regime prima e dopo il transitorio. In qualunque istante è possibile essere certi che la corrente che circola nell'induttore è data da una componente transitoria e da una permanente, cioè $i_L = i_T + i_P$, allo stesso modo la tensione su un condensatore è $v_C = v_{CT} + v_{CP}$ con v_{CT} componente transitoria, e v_{CP} componente permanente, detto ciò è possibile riscrivere l'equazione differenziale rappresentativa dell'equilibrio elettrico del circuito nel seguente modo $v - L \frac{di_P}{dt} - L \frac{di_T}{dt} - v_{CT} - v_{CP} = Ri_P + Ri_T$, questa

può essere spezzata nelle due equazioni

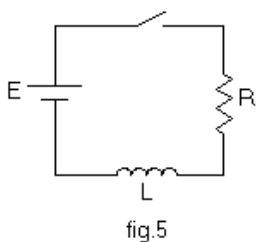
$$\begin{cases} v - L \frac{di_P}{dt} - v_{CP} = Ri_P & (A) \\ -L \frac{di_T}{dt} - v_{CT} = Ri_T & (B) \end{cases}$$

l'equazione (A) è



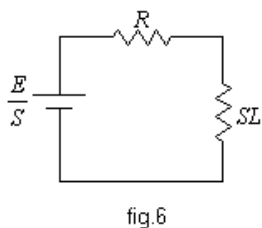
rappresentativa del regime permanente, che può essere studiato con i metodi noti, la (B) è invece rappresentativa del regime transitorio, è pertanto necessario che questa si L-trasformata, ottenendo così il circuito di fig.4, chiamato circuito dell'evoluzione libera. Il grosso vantaggio sta nel fatto che questa volta non vi è la presenza della forzante, è necessario fare attenzione al fatto che questa volta $i_T(0)$ e $v_{CT}(0)$ sono le

condizioni iniziali del transitorio, sono cioè i valori di corrente e di tensione che si hanno nell'istante in cui ha inizio il transitorio. Anche in questo caso non è possibile distinguere le componenti transitorie dovute alla forzante da quelle dovute alle condizioni iniziali.



In precedenza, risolvendo l'equazione differenziale (cioè usando il primo metodo), abbiamo trovato la legge di carica dell'induttore, vogliamo vedere adesso come sia possibile fare la stessa cosa utilizzando prima il metodo della trasformata di Laplace (secondo

metodo), e poi quello dell'evoluzione libera (terzo metodo). Consideriamo il circuito



di fig.5, scrivendo l'equazione alla maglia si ottiene $E - L \frac{di}{dt} = Ri$

che L-trasformata porta a $\frac{E}{S} - SLI + Li_L(0) = RI$, vogliamo trovare la legge di carica pertanto supponiamo che le condizioni iniziali siano nulle, ovvero che $i_L(0) = 0$, si ha pertanto

$$\frac{E}{S} = (R + SL)I \Rightarrow I = \frac{E/S}{R + SL} (*)$$

questa rappresenta quindi la risposta a stato zero, il relativo circuito è quello rappresentato in fig.6, per trovare quindi la corrente nel tempo è sufficiente antitrasformare.

Vediamo adesso come è possibile procedere con il metodo dell'evoluzione libera, premettendo che in questo caso è possibile applicare questo metodo grazie al fatto che il circuito ammette regime permanente prima e dopo il transitorio, abbiamo detto

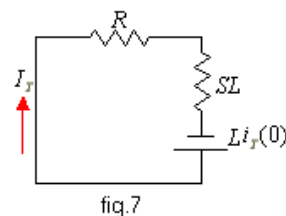
$t < 0$	$t = 0$	$t \gg 0$
$i = 0$	$i(0) = 0$	$i_p = \frac{E}{R}$
	$i_p(0) = \frac{E}{R}$	
	$i_T(0) = -\frac{E}{R}$	

che è necessario conoscere i valori delle componenti transitorie all'istante iniziale, per trovarli ricordiamo che $i = i_T + i_p \Rightarrow i_T = i - i_p$ (C), costruiamo la tabella qui a fianco, sappiamo che per $t \gg 0$ si ha $i_p = \frac{E}{R}$ e quindi anche per $t = 0$, per $t = 0$ si ha inoltre $i = 0$, pertanto dalla (C) all'istante

iniziale si ha $i_T = -\frac{E}{R}$. E' quindi necessario L-trasformare

$-L \frac{di_T}{dt} = Ri_T$, ottenendo il circuito rappresentato in fig.7, e quindi

$Li_T(0) = (R + SL)I_T \Rightarrow I_T = \frac{Li_T(0)}{R + SL}$, che antitrasformata rappresenta



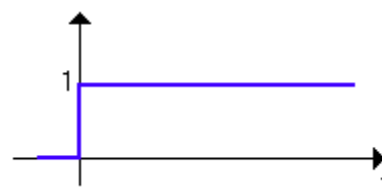
la componente transitoria della corrente, come è possibile notare antitrasformare la relazione ottenuta è più semplice di antitrasformare la (*), in conclusione per trovare la legge di carica, ovviamente alla componente transitoria ottenuta bisogna sommare quella permanente scritta in tabella.

Le funzioni elementari più note sono:

- Funzione gradino

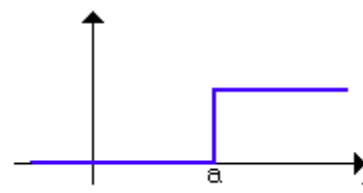
questa è la funzione gradino unitaria applicata in 0

$$u(t) = \begin{cases} 0 \rightarrow t < 0 \\ 1 \rightarrow t > 0 \end{cases}$$

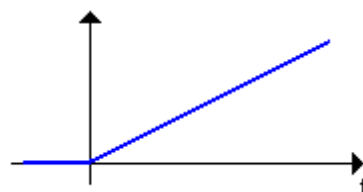


la funzione gradino applicata in un generico istante è

$$u(t - a) = \begin{cases} 0 \rightarrow t < a \\ 1 \rightarrow t > a \end{cases}$$



- Funzione rampa



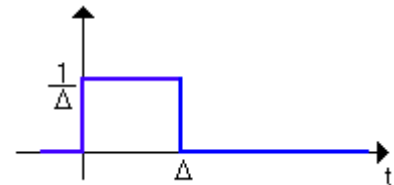
questa funzione è $r(t) = \begin{cases} 0 \rightarrow t < 0 \\ 1 \rightarrow t > 0 \end{cases}$

anche questa può essere applicata in un generico istante, il legame tra la funzione gradino e la funzione rampa, è espresso dal fatto che la rampa non è altro che la derivata del gradino, ovviamente un sistema sollecitato da una rampa non raggiungerà mai il regime permanente;

- Funzione impulso di durata finita

questa funzione è chiamata anche delta di Dirac, la sua

definizione è la seguente $P_{\Delta} = \begin{cases} 0 \rightarrow t < 0 \\ 1/\Delta \rightarrow 0 \leq t \leq \Delta \\ 0 \rightarrow t > \Delta \end{cases}$ essa ha la



caratteristica di sottendere un'area unitaria, ovviamente essa può essere espressa come differenza tra due gradini, si definisce impulso di Dirac il limite per delta che tende a zero dell'impulso finito, quest'ultimo è di notevole importanza anche grazie al fatto che ha L-trasformata uguale ad uno, questa caratteristica ci garantisce che un sistema sollecitato dall'impulso di Dirac, ha come uscita la funzione di trasferimento.

Le funzioni elementari viste sono di notevole importanza, in quanto spesso permettono la scomposizione di funzioni più complesse, potrebbe comunque capitare di avere a che fare con funzioni molto complesse non facilmente scomponibili, in tal caso se è nota l'espressione analitica si potrebbe tentare di trasformare, risolvere, e

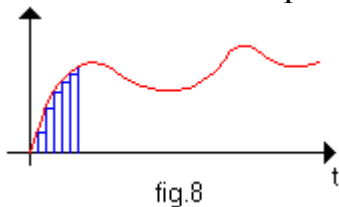


fig.8

antitrasformare, ma se non è nota è necessario suddividere il tempo in tanti piccoli intervalli, ed approssimare in ogni intervallino il segnale o con un impulso, o con un gradino come mostrato in fig.8, infine calcolare la risposta a tutti i gradini (o impulsi) supponendo di volta in volta che le

condizioni iniziali siano nulle, successivamente sommare tutte queste risposte, l'ipotesi di condizioni iniziali nulle non porta a commettere errori, in quanto se ne tiene conto automaticamente nella somma.

L trasformati di un accoppiamento mutuo

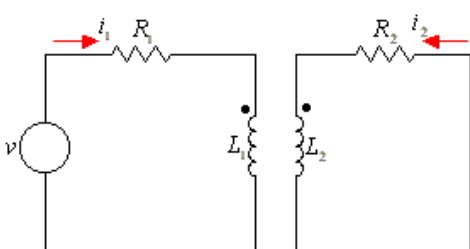


fig.1

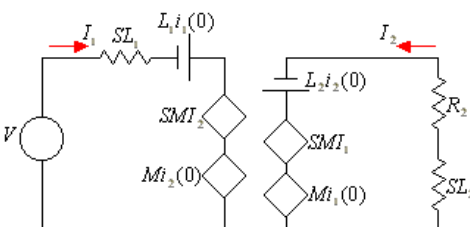


fig.2

Consideriamo un circuito del tipo mostrato in fig.1, vogliamo vedere come si L-trasforma, scriviamo a tal proposito le equazioni alle due maglie:

$$v - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = R_1 i_1 \quad - L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = R_2 i_2$$

trasformando si ottiene

$$\begin{cases} V - SL_1 I_1 + L_1 i_1(0) - SM I_2 + M i_2(0) = R_1 I_1 \\ - SL_2 I_2 + L_2 i_2(0) - SM I_1 + M i_1(0) = R_2 I_2 \end{cases} \quad \text{il circuito}$$

che si ottiene è quindi quello rappresentato in fig.2,

solitamente è comunque conveniente scrivere le equazioni intermini istantanei, ed L-trasformare senza disegnare il circuito.

Impianti

Per impianto elettrico si intende industrialmente l'insieme delle macchine elettriche e delle apparecchiature di manovra, protezione e controllo interconnesse fra loro e destinate alla produzione, al trasporto, alla distribuzione e all'utilizzazione dell'energia elettrica. La macchina usata per la generazione della corrente elettrica alternata, è chiamata alternatore o macchina sincrona, questa macchina funziona a velocità rigorosamente costante ed imposta dalla frequenza di funzionamento, in altre parole dalla frequenza che si vuole abbia la grandezza generata. Come è già stato detto precedentemente, l'alternatore come il motore asincrono è formato principalmente da un rotore e da uno statore, sul rotore però è avvolto un unico avvolgimento alimentato in c.c., in modo tale che venga generato un campo magnetico costante, mettendo meccanicamente in rotazione il rotore si ha una sorta di campo magnetico rotante (che non è il campo di Galileo Ferraris) che taglia i tre avvolgimenti di statore (si sta facendo riferimento all'alternatore trifase) facendo nascere conseguentemente, grazie al fenomeno dell'induzione, una f.e.m. su ognuno degli avvolgimenti che può essere prelevata. Per quello detto sul rotore si ha in linea

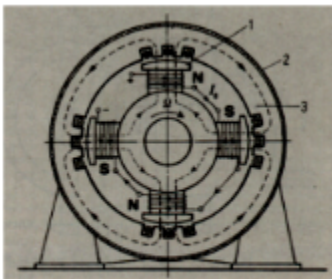


fig.1

di principio un polo nord ed un polo sud, a parità di frequenza il numero di poli può essere aumentato in modo tale da poter diminuire la velocità di rotazione alla quale funziona la macchina. Per velocità relativamente basse vengono realizzati i cosiddetti rotor a poli salienti (vedi fig.1), però per alternatori funzionanti a grandi velocità, aventi due o quattro poli al

massimo, viene abbandonata la costruzione a poli sporgenti, data l'elevata forza centrifuga che crea problemi per il loro ancoraggio, per passare ad un tipo di rotore detto a poli lisci, mostrato in fig.2. L'alternatore è una macchina che può funzionare anche da motore, il problema è che non è autoavviante, è pertanto necessario portarlo preventivamente in rotazione.

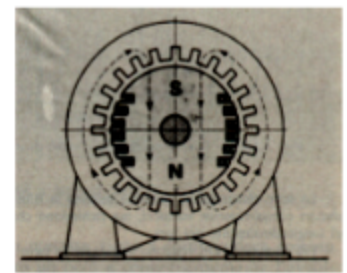
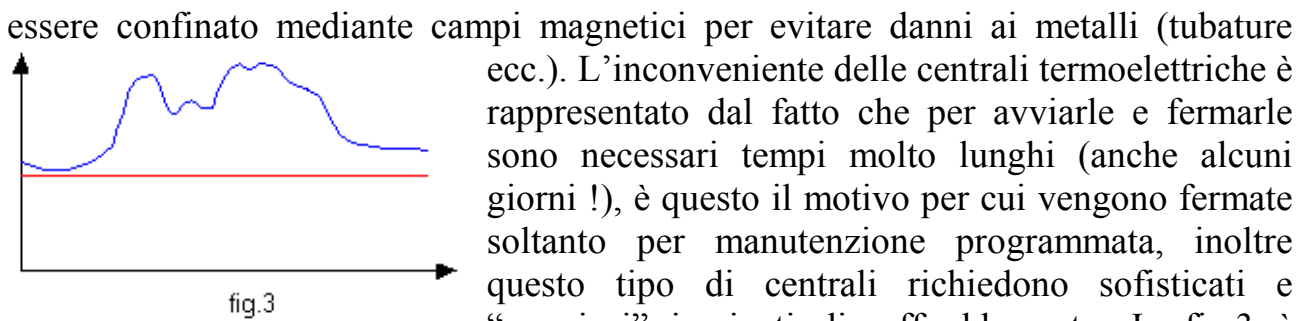


fig.2

Per la produzione dell'energia elettrica sono usati grossi alternatori che vengono messi in rotazione dalle turbine, l'edificio che contiene la turbina, il generatore e tutte le macchine e le apparecchiature necessarie per il comando, il controllo e la regolazione, prende il nome di centrale elettrica, queste sono principalmente di due tipi: centrali termoelettriche e centrali idroelettriche. Nelle centrali termoelettriche vengono usate le cosiddette turbine a vapore, ed esse possono essere classificate in base al modo di produrre il vapore e quindi al tipo di combustibile usato, che può essere legno, carbone, uranio arricchito (fissione nucleare), plasma che deve però



essere confinato mediante campi magnetici per evitare danni ai metalli (tubature ecc.). L'inconveniente delle centrali termoelettriche è rappresentato dal fatto che per avviarle e fermarle sono necessari tempi molto lunghi (anche alcuni giorni !), è questo il motivo per cui vengono fermate soltanto per manutenzione programmata, inoltre questo tipo di centrali richiedono sofisticati e "massicci" impianti di raffreddamento. In fig.3 è rappresentato un esempio del cosiddetto diagramma di carico giornaliero, che esprime l'andamento della potenza assorbita durante il giorno dalla nazione, è ovvio per quello detto che il carico di base delimitato dalla linea rossa (quello necessario in ogni momento del giorno), è alimentato dalle centrali termoelettriche, per alimentare il carico temporaneo rappresentato dalle punte del diagramma, è invece necessario avviare centrali elettriche che richiedono piccoli tempi d'avviamento (10-15 minuti), queste principalmente sono le centrali idroelettriche, ma possono essere centrali che sfruttano le maree marine, centrali eoliche, a biogas, geotermiche, ecc., per esempio quelle a biogas sono usate dalle aziende produttrici di carni per soddisfare i propri fabbisogni di energia elettrica. Le turbine usate nelle centrali idroelettriche sono principalmente le turbine Pelton, che funzionano a getto d'acqua, in altre parole l'energia idraulica è usata sotto forma di energia cinetica, in questo tipo di centrali grosse scorte d'acqua sono contenute nel bacino di presa che può essere naturale o artificiale. I bacini artificiali non sono altro che dighe quasi sempre realizzate in calcestruzzo, queste possono essere a gravità, per le quali la resistenza all'acqua è rappresentata dal proprio peso, ad arco gravità, o a cupola. L'acqua viene convogliata dal bacino di presa, per gravità attraverso le condotte forzate in turbina, la quale mette in movimento l'alternatore. Le condotte forzate possono essere posate all'aperto oppure in galleria, sono costruite con lamiere d'acciaio saldate, ed il loro spessore al crescere della pressione e del diametro. L'acqua proveniente dal bacino di presa dopo aver attraversato la turbina viene raccolta in un altro bacino, infine questa viene ripompata nel bacino di presa utilizzando l'energia in eccesso prodotta durante la notte dalle centrali base (termoelettriche), per il ripompaggio si usa lo stesso sistema turbina-generatore, il quale è reversibile e quindi può essere usato come sistema motore-pompa, ovviamente le condotte non sono quelle forzate.

Distribuzione

La trasmissione dell'energia elettrica riguarda il trasporto dell'energia stessa dalle centrali di produzione fino alle cabine di trasformazione primarie, ubicate nei baricentri di vaste zone di consumo, queste linee di interconnessione fra le centrali e le diverse cabine primarie costituiscono nel loro complesso la rete primaria di trasporto, ovviamente viste le enormi potenze in gioco la distribuzione primaria viene fatta ad alta tensione (AT) 380 kV, in modo tale da ridurre il più possibile le perdite.

Le cabine primarie la trasformano per la distribuzione secondaria a media tensione (MT) 20 kV. Le cabine elettriche la trasformano infine in bassa tensione (BT) 380 V.

Posa in opera dei cavi

Un impianto è selettivo se verificatosi un guasto in una singola utenza è garantita la continuità di servizio per la rimanente parte dell'impianto, ovviamente la selettività cresce se tutte le linee delle singole utenze fanno capo ad un interruttore. La realizzazione di un impianto selettivo è più onerosa in termini economici di uno non selettivo, ma in fase di manutenzione si ha un grosso risparmio in quanto i tempi necessari per le ricerche guasto sono brevi.

La posa in opera dei cavi può essere in aria, entro tubo o canaletta, a vista, ecc., è importante distinguere il tipo di posa in quanto da essa dipende la sezione che devono avere i conduttori, inoltre è necessario distinguere tra cavi multipolari e unipolari. Per capire come il tipo di posa possa incidere sulla sezione è necessario ricordare che la portata di un conduttore è la massima corrente che può circolare in esso senza che l'isolante (comunemente PVC) vada in sovratemperatura, con una conseguente cristallizzazione dello stesso. Per quello detto è quindi ovvio che a parità di corrente la sezione di un cavo in aria è inferiore rispetto a quella di un cavo entro tubo. Le norme prevedono che il raggio della circonferenza circoscritta al fascio di cavi

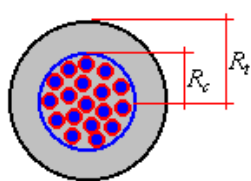


fig.4

contenuti all'interno di un tubo, sia il 70% del raggio del tubo stesso, cioè facendo riferimento alla fig.4 deve essere $R_t > 1,3R_c$, inoltre le norme prevedono che all'interno di uno stesso tubo non ci siano cavi di potenza e cavi di segnale (come TV, citofono, ecc.), ancora è necessario che i tubi a pavimento sia se flessibili sia se rigidi siano del tipo pesante (marchio P), inoltre anche se

non previsto dalla legge è buona norma che i tubi seguano percorsi solo perpendicolari, in modo tale da avere sempre un'idea del percorso da essi seguito.

Protezione dai contatti diretti e indiretti

Un contatto si dice diretto se avviene con parti normalmente in tensione, come un conduttore scoperto, un morsetto collegato, ecc. Un contatto si dice invece indiretto se avviene con parti conduttrici che pur non essendo normalmente in tensione, possono assumere un potenziale diverso da zero in seguito a un guasto d'isolamento, come il contatto con la carcassa di un motore, di un elettrodomestico ecc., in occasione di una dispersione di corrente verso massa. Si definiscono masse metalliche, tutte le parti conduttrici facenti parte dell'impianto elettrico, che possono essere toccate e che in condizioni di normale isolamento non sono in tensione. In particolare per massa metallica estranea s'intende una parte conduttrice, che non fa parte dell'impianto elettrico, in grado di introdurre il potenziale di terra, o in casi

particolari altri potenziali. Le protezioni dai contatti diretti sono di tipo meccanico, e in particolare nel caso di impianti accessibili a persone non aventi conoscenze tecniche o esperienza sufficiente ad evitare i pericoli dell'elettricità (persone non addestrate) devono essere di tipo totale, in linea di massima consistono nell'isolamento delle parti attive e nell'uso di involucri o barriere.

Un tipo di protezione dai contatti sia diretti che indiretti, è l'interruttore differenziale (comunemente chiamato salvavita), esso è un dispositivo in grado di aprire il circuito quando nell'impianto si manifesta una dispersione superiore ad un certo limite. Il

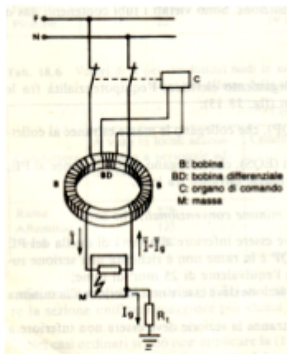


fig.4

funzionamento di questo dispositivo è basato sull'equilibrio di due flussi magnetici, come illustrato in fig.4 esso è costituito da un nucleo magnetico a forma di toroide, sul quale sono avvolte tre bobine, due delle quali identiche, in assenza di dispersioni la corrente che attraversa la prima bobina è identica a quella che attraversa la seconda, questo implica che all'interno del nucleo circolino due flussi magnetici uguali ed opposti, la conseguenza di questo fatto è che il flusso totalmente concatenato con la terza bobina è nullo. La conseguenza di una dispersione è che la corrente che circola nella seconda bobina è più piccola rispetto

a quella che circola nella prima, questo implica che sulla terza bobina nasca una f.e.m.i., quando la corrente di dispersione è relativamente intensa la f.e.m.i. è tale da azionare un dispositivo di apertura del circuito. Per quello detto è quindi chiaro che questo tipo di protezione è efficace per i contatti con un solo filo, ma non protegge dai contatti filo-filo, inoltre l'interruttore differenziale interviene solo nell'eventualità che avvenga il contatto magari in seguito al cedimento dell'isolamento di qualche parte dell'impianto, e non segnala in nessun modo l'avvenuto guasto, per ovviare a

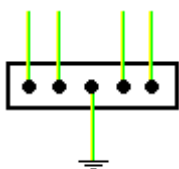


fig.5

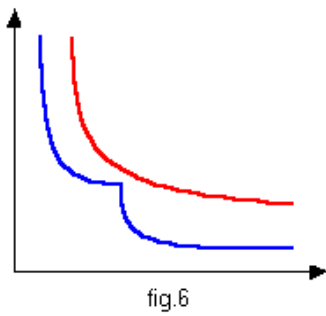
tale problema è necessario abbinare all'interruttore differenziale il cosiddetto impianto di terra. Lo scopo dell'impianto di messa a terra è quello di rendere equipotenziali le parti metalliche, l'impianto è fatto in modo tale che tutti i conduttori arrivino al nodo di terra, dal quale come illustrato in fig.5 parte il conduttore di terra che lo collega al dispersore. I dispersori sono corpi metallici che hanno il compito, essendo posti in intimo contatto con il terreno, di realizzare il

collegamento elettrico con la terra per disperdere correnti elettriche, è pertanto chiaro che in seguito ad un cedimento dell'isolamento, si ha istantaneamente una dispersione, che può essere rilevata dall'interruttore differenziale il quale può intervenire aprendo il circuito.

Protezione dai cortocircuiti e dai sovraccarichi

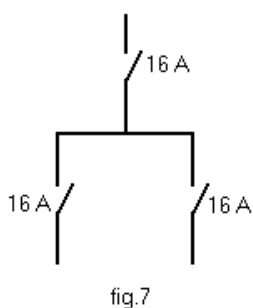
Il dispositivo più usato per la protezione dai cortocircuiti è l'interruttore magnetico, il suo funzionamento si basa sulla forza che un elettromagnete esercita su un nucleo mobile in ferro, questo dispositivo deve interrompere la corrente di cortocircuito

prima che essa diventi pericolosa per gli effetti termici e meccanici provocati nell'impianto, questo è il motivo per cui è necessario che il dispositivo usato per la protezione dai cortocircuito abbia un tempo d'intervento inverso, vale a dire che il tempo d'intervento decresca al crescere della corrente di cortocircuito. Per tempo d'intervento s'intende il tempo che intercorre tra l'apertura e l'interruzione vera e propria, infatti la corrente non può essere interrotta istantaneamente a causa della nascita del cosiddetto arco elettrico, le tecniche di



estinzione dell'arco sono svariate. L'energia (calore) che investe il conduttore nel tempo che intercorre tra la nascita del cortocircuito e l'apertura del circuito, è rappresentata dall'integrale di Joule $\int Ri^2 dt$, questa energia prende il nome di energia passante, e come rappresentato in fig.6 il tempo d'intervento deve essere tale che l'energia passante (curva blu) stia sotto la curva di sopportabilità termica (curva rossa). E' inoltre necessario fare attenzione al fatto che il dispositivo d'interruzione deve essere in grado di interrompere con sicurezza la massima corrente di cortocircuito che si può produrre nel punto d'installazione, il massimo valore di corrente che l'interruttore può interrompere prende il nome di potere d'interruzione. E' inoltre necessario salvaguardare gli impianti dai sovraccarichi, la protezione quindi deve essere tale da interrompere le correnti di sovraccarico prima che queste possano provocare un riscaldamento nocivo all'isolante, ai collegamenti, ai terminali o all'ambiente esterno, allo stesso momento la protezione deve essere tale da non intervenire nel caso di sovraccarichi di breve durata che spesso si producono nel normale esercizio, non deve pertanto avere un piccolo tempo d'intervento. Il dispositivo usato per questo tipo di protezione è il cosiddetto interruttore termico, il suo principio di funzionamento è basato sull'effetto Joule, esso è costituito da una coppia bimetallica, cioè da due lamine accostate, aventi un differente valore del coefficiente di dilatazione lineare e collegate in modo tale da essere interessate, direttamente o indirettamente, dalla corrente circolante nel circuito che si vuole proteggere. Il calore sviluppato per effetto Joule determina una deformazione della bilamina, che viene sfruttata per azionare un dispositivo di sgancio.

L'insieme della protezione magnetica e termica, prende il nome di interruttore magneto termico, esistono inoltre gli interruttori magneto termici differenziali.



Pertanto ogni linea che parte dal quadro elettrico deve essere protetta, è necessario però fare attenzione al fatto che l'impianto deve essere selettivo, per esempio nella situazione schematizzata in fig.7 si ha una scarsa selettività, in quanto in seguito ad un sovraccarico in una delle due linee, potrebbe intervenire l'interruttore più a monte e non quello della linea interessata, in questo caso sarebbe quindi più opportuno che l'interruttore a monte fosse da 20 A.

Gli interruttori possono essere di tipo 2P (bipolare), che apre entrambi i poli (fase e neutro), o di tipo 1P+N, cioè unipolare.

Le utenze si suddividono in utenze normali, utenze in emergenza e utenze in sicurezza, le utenze in emergenza sono quelle che hanno bisogno di continuare a funzionare anche in assenza di alimentazione dalla rete, è pertanto necessario che siano alimentate dai cosiddetti gruppi elettrogeni, le utenze in sicurezza sono quelle invece per le quali non è possibile che la tensione d'alimentazione manchi per più di mezzo secondo, in questo caso è pertanto necessario che siano alimentate da gruppi UPS, più comunemente conosciuti come gruppi di continuità, l'insieme di un gruppo elettrogeno e di un UPS garantisce la continuità prolungata anche in assenza di tensione di rete, e garantisce che non si verifichino neanche brevi interruzioni.

La 64-8 è la normativa per impianti civili, ci sono ambienti a grosso rischio d'incendio e di esplosione per i quali è necessario realizzare impianti particolari, come ad esempio i locali adibiti ad uso medico nei quali vengono usate sostanze infiammabili oppure dove sono possibili elevate concentrazioni di ossigeno che favoriscono la combustione. Gli ambulatori possono essere di tipo A o B, i primi sono quelli in cui possono esserci delle parti in tensione applicate ai pazienti, quelli di tipo B sono invece ambulatori normali. I locali per chirurgia sono tutti quei locali addicenti alle sale operatorie (sala anestesia, ecc.) funzionalmente o topologicamente, nelle sale operatorie viene realizzata sotto pavimento la maglia di rame, questa è immersa in una colla conduttrice al disopra della quale vi è il pavimento senza fughe, la placca che viene posta sul paziente è collegata alla maglia.

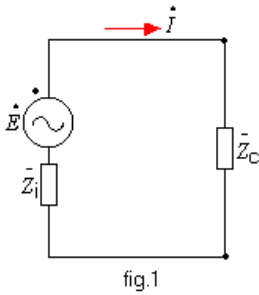
Pericolosità della corrente elettrica

Nel corpo umano il controllo dell'attività dei vari organi (battito cardiaco, respirazione, ecc.) viene effettuato tramite segnali elettrici trasmessi dai neuroni del sistema nervoso, la presenza di stimoli elettrici esterni, dovuti per esempio ad un contatto diretto o indiretto, disturba questo controllo provocando effetti fisiopatologici variamente pericolosi in funzione di vari fattori, di cui i più importanti sono l'intensità della corrente, la frequenza, la massa corporea, lo stato di salute, il sesso del soggetto interessato. Ovviamente la pericolosità cresce al crescere del tempo di esposizione, inoltre il valore della corrente dipende dalla resistenza del corpo umano, che a sua volta dipende dal tipo (mano-mano, mano torace, ecc.) e dalle condizioni (scarpe, mani bagnate, ecc.) di contatto. Gli effetti fisiopatologici sono svariati, tra gli effetti più frequenti e pericolosi vi è la tetanizzazione dei muscoli, questa consiste nella contrazione involontaria dei muscoli interessati al passaggio della corrente, non più comandati dagli impulsi elettrici fisiologici, nella forma più grave non consente all'interessato di staccarsi dalla parte in tensione, prolungando quindi il contatto e producendo effetti ancor più dannosi. Si capisce che la tetanizzazione può provocare difficoltà o addirittura arresto della respirazione. Un altro effetto molto grave è la fibrillazione ventricolare, questo effetto è causato dal fatto che la corrente esterna si sovrappone a quelle fisiologiche prodotte dal nodo senoatriale che hanno la funzione di far contrarre in modo ritmico e regolare le fibre

muscolari dei ventricoli, la presenza di correnti esterne genera una contrazione scoordinata e caotica che impedisce al cuore di svolgere la sua funzione e che porta alla morte per arresto cardiaco, l'unica soluzione in questi casi è la defibrillazione. Un effetto altrettanto pericoloso e che può verificarsi nel caso di corrente continua è l'elettrolisi del sangue, che impedisce al sangue di trasportare l'ossigeno.

Teorema del massimo trasferimento di potenza

Consideriamo il generatore di tensione non ideale rappresentato in fig.1, la cui



impedenza interna, com'è possibile notare, è \bar{Z}_i . Supponiamo che tale generatore alimenti un carico d'impedenza \bar{Z}_c , vogliamo trovare la condizione che deve essere verificata perché il generatore fornisca al carico la massima potenza. E' necessario prestare attenzione al fatto che non stiamo cercando una condizione che ci garantisca che sul carico sia trasferita la più alta percentuale della potenza prodotta (massimo rendimento), ma solo

la maggiore potenza possibile.

Ricordiamo che la potenza attiva dissipata sul carico è $P_C = R_C I^2$ (a), facendo riferimento al circuito di fig.1 è possibile notare che $I = \frac{E}{|\bar{Z}_i + \bar{Z}_c|}$, sostituendo questa

nella (a) si ottiene $P_C = R_C \frac{E^2}{|\bar{Z}_i + \bar{Z}_c|^2} = R_C \frac{E^2}{(R_i + R_C)^2 + (x_i + x_c)^2}$, da quest'ultima è

innanzitutto possibile concludere che deve essere $x_i = -x_c$, verificata tale condizione

la potenza diventa quindi $P_C = R_C \frac{E^2}{(R_i + R_C)^2}$, vogliamo adesso trovare una condizione

su R_C , in altre parole è necessario studiare la funzione al variare di tale parametro, in particolare a noi interessa trovare il valore di R_C che la rende massima, per far ciò è possibile derivare e porre la derivata uguale a zero, come mostrato di seguito:

$$\frac{dP_C}{dR_C} = E^2 \frac{d}{dt} \left[\frac{R_C}{(R_i + R_C)^2} \right] = E^2 \frac{(R_i + R_C)^2 - 2R_C(R_i + R_C)}{(R_i + R_C)^4} = \frac{R_i + R_C - 2R_C}{(R_i + R_C)^3} = \frac{R_i - R_C}{(R_i + R_C)^3} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow R_C = R_i$, abbiamo quindi trovato che la derivata prima si annulla quando la resistenza del carico coincide con la resistenza del generatore, vogliamo adesso verificare che effettivamente per questo valore di R_C la potenza è massima, a tal proposito è possibile osservare che il denominatore della derivata $(R_i + R_C)^3 > 0$ sempre, ed il numeratore è positivo quando $(R_i - R_C) > 0 \Rightarrow R_C < R_i$, è pertanto possibile concludere che per $R_i = R_C$ si ha effettivamente un massimo. Riassumendo è possibile dire che il teorema del massimo trasferimento di potenza afferma che il

generatore fornisce al carico la massima potenza possibile se si verifica che $\bar{Z}_C = \bar{Z}_i^*$, in altre parole che l'impedenza del carico è il complesso coniugato dell'impedenza interna del generatore.

Dimostrazione del teorema di reciprocità per gli accoppiamenti induttivi

Ricordiamo che dato un accoppiamento mutuo del tipo mostrato in fig.1, si

definiscono coefficienti di autoinduzione $L_1 = \frac{\phi_{1C}}{i_1} \Big|_{i_2=0}$ e $L_2 = \frac{\phi_{2C}}{i_2} \Big|_{i_1=0}$, coefficienti di mutua induzione $M_{12} = \frac{\phi_{2C}}{i_1} \Big|_{i_2=0}$ e $M_{21} = \frac{\phi_{1C}}{i_2} \Big|_{i_1=0}$, il teorema di reciprocità afferma che $M_{12} = M_{21}$, dimostriamolo:

sappiamo che è possibile scrivere le d.d.p. sui due induttori come segue

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{21} \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{12} \frac{di_1}{dt} \end{cases} \quad \text{inoltre la potenza istantanea complessivamente assorbita dai due}$$

induttori è $p = v_1 i_1 + v_2 i_2$, pertanto si ha che il lavoro elementare è

$$dL = P dt = \left(L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{21} \frac{di_2}{dt} \right) i_1 dt + \left(L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{12} \frac{di_1}{dt} \right) i_2 dt = L_1 i_1 di_1 + M_{21} i_1 di_2 + L_2 i_2 di_2 + M_{12} i_2 di_1$$

tenendo conto di questo risultato, calcoliamo il lavoro ciclico lungo il percorso chiuso di fig.2 (il punto 3 ha coordinate i_1, i_2), che è possibile ottenere facendo variare le correnti in modo opportuno, si ha

fig.2

$$L_{12} = \int_1^2 L_1 i_1 di_1 = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \quad L_{23} = \int_2^3 (L_2 i_2 di_2 + M_{21} i_1 di_2) = \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M_{21} i_1 i_2$$

$$L_{34} = \int_3^4 (L_1 i_1 di_1 + M_{12} i_2 di_1) = -\frac{1}{2} L_1 i_1^2 - M_{12} i_1 i_2 \quad L_{41} = \int_4^1 L_2 i_2 di_2 = -\frac{1}{2} L_2 i_2^2, \text{ sommando si}$$

ottiene che il lavoro ciclico è $L_C = (M_{12} - M_{21}) i_1 i_2$, se fosse $M_{12} > M_{21}$ significherebbe che viene fatto del lavoro sul sistema, se invece fosse $M_{12} < M_{21}$ significherebbe che il sistema fa lavoro, ma avendo percorso un ciclo entrambi i casi sono impossibili, pertanto l'unica soluzione possibile è che $M_{12} = M_{21}$ c.v.d.

E' possibile pervenire allo stesso risultato in altro modo:

consideriamo la funzione energia del sistema $w = w(i_1, i_2)$, per definizione di energia si ha $dw = dL$, essendo w una funzione scalare, la forma differenziale dL deve necessariamente essere esatta, cioè essendo $dL = (L_1 i_1 + M_{12} i_2) di_1 + (M_{21} i_1 + L_2 i_2) di_2$, c.n.s.

affinché tale forma differenziale sia esatta è che sia chiusa, cioè

$$\frac{\partial}{\partial i_2}(L_1 i_1 + M_{12} i_2) = \frac{\partial}{\partial i_1}(M_{21} i_1 + L_2 i_2) di_2 \Rightarrow M_{12} = M_{21} \quad \text{c.v.d.}$$

La d.d.p. ai capi di un resistore è inferiore a quella del generatore

Vogliamo far vedere che in qualunque circuito in c.c. la d.d.p. ai capi di una resistenza è inferiore a quella del generatore. Pertanto se la resistenza di fig.1 è una resistenza di un circuito, nel quale è presente un generatore di tensione, la cui f.e.m. è E , per dimostrare quanto detto è necessario far vedere che $0 \leq E_1, E_2 \leq E$. Supponiamo per assurdo che esistano nodi del circuito a potenziale maggiore di E , scegliamo tra questi quello che ha il potenziale più elevato, indichiamo inoltre tale nodo con i , pertanto

facendo riferimento alla fig.2 supponiamo che sia $E_i > E$, grazie all'ipotesi assurda fatta le correnti nei tre rami connessi al nodo devono necessariamente essere uscenti, ma d'altra parte per la prima legge di K la loro somma deve essere zero, l'unico caso in cui la somma di tre quantità dello stesso segno è nulla, è quando tutte e tre le quantità sono nulle, siamo quindi giunti alla conclusione che le tre correnti nei tre rami sono nulle; questo implica che i potenziali dei nodi sottostanti siano coincidenti con E_i . Ripetendo lo stesso ragionamento per i nodi sottostanti, ed ancora per quelli sotto, prima o poi incontrerò il generatore e arriverò a dire che $E_i = E$, ciò implica che l'ipotesi di partenza sia effettivamente assurda e quindi che $E_i \leq E$. Con lo stesso ragionamento è possibile concludere che $E_i \geq 0$.

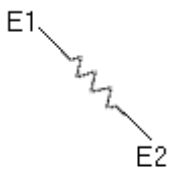


fig.1

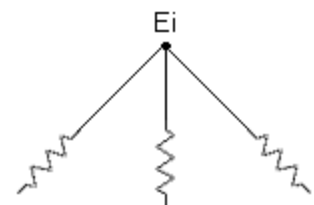


fig.2

Teoria dei grafi

La teoria dei grafi è la base teorica dei metodi sistematici di analisi dei circuiti. Su di essa sono basati simulatori di circuiti come lo spice.

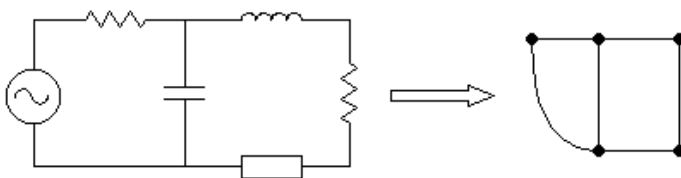


fig.1

Si definisce grafo l'insieme di lati e di nodi di un circuito, con la condizione che ogni lato incida su due nodi, in fig.1 è mostrato il grafo relativo al circuito della stessa figura. Ovviamente un grafo contiene solo

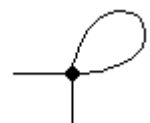


fig.2

informazioni topologiche del circuito, le quali, da sole, non possono consentire l'analisi di un circuito, occorre a tale scopo, conoscere come sono costituiti i singoli rami. La maglia di fig.2 prende il nome di maglia propria, mentre un grafo formato da

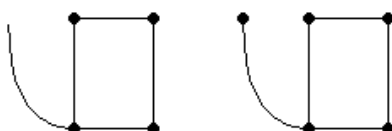


fig.3

fig.4

un solo nodo prende il nome di grafo degenerare. Si definisce sottografo un sottoinsieme del grafo che è a sua volta un grafo, dove per sottoinsieme s'intende che i nodi e i lati costituenti il sottografo devono comunque appartenere al grafo di partenza, per esempio quello mostrato in fig.3 non è un sottografo del grafo di fig.1 (in quanto non è un grafo), ma quello di fig.4 lo è. E' necessario fare attenzione al fatto che uno stesso circuito può essere rappresentato da più grafi (facendo per esempio la serie o il parallelo di due bipoli).

Sappiamo che in un circuito quando si parla di corrente o di tensione è necessario prestare attenzione ai segni, cioè sappiamo che se per esempio una corrente è negativa il verso è discorde a quello arbitrariamente fissato nel circuito. Anche in un

grafo è necessario fare attenzione ai riferimenti, questo può essere fatto fissando arbitrariamente versi e segni, si preferisce comunque utilizzare la convenzione dei riferimenti associati, secondo la quale ogni lato del grafo esce da dove esce la corrente, cioè, come mostrato in fig.5, dal nodo a potenziale più elevato. Con la convenzione dei riferimenti associati la potenza in ogni lato, data da $p = vi$, è quella assorbita dal lato stesso, questo implica che se nel

ramo del circuito di partenza relativo al lato in esame vi è una resistenza, la potenza è positiva, se vi è un generatore è negativa (quest'ultima affermazione non sempre è vera). Un grafo per il quale è stata utilizzata la convenzione vista, prende il nome di grafo orientato.



fig.5

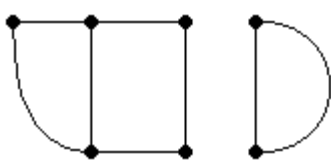


fig.6

Dato un grafo è possibile applicare ad esso le leggi di Kirchhoff, infatti queste possono essere applicate a partire dalla conoscenza della sola topologia del circuito.

Un grafo si dice connesso, se presa qualunque coppia di nodi esiste un percorso, formato da lati e nodi del grafo, che unisce i nodi considerati, per esempio detto il grafo

rappresentato in fig.6 non è connesso.

L'insieme di taglio di un grafo connesso, è un sottoinsieme formato dai lati del grafo

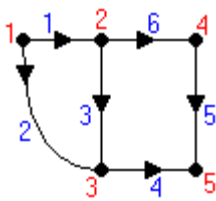


fig.7

che tagliati rendono il grafo non connesso, e che tagliati tranne uno qualsiasi lasciano il grafo connesso. Un esempio di insiemi di taglio per il grafo di fig.7 è quello formato dai lati 6 e 4, o ancora quello formato dai lati 2, 3 e 5. Invece un esempio di insieme di lati che non è un insieme di taglio, è quello formato dai lati 3, 4 e 5. In generale l'insieme formato dai lati che insistono su un nodo, è un

insieme di taglio, comunque esistono delle eccezioni. L'insieme di taglio è di grossa utilità nell'applicare la legge di Kirchhoff alle correnti, infatti permette di scrivere il massimo numero di equazioni indipendenti alle correnti, ciò si capisce osservando che i lati contenuti nell'insieme di taglio dividono in due parti il grafo, e quindi per il principio di conservazione della carica la somma algebrica delle correnti che passano nei lati dell'insieme di taglio è nulla, infine ricordando che aggiungendo uno dei lati dell'insieme di taglio, il grafo diventa connesso, la possibilità di scrivere un'equazione errata è esclusa.

In un grafo si definisce **maglia**, un sottografo connesso che soddisfa ad una particolare condizione: su ogni nodo del sottografo incidono due lati del sottografo stesso. Questa definizione di maglia è necessaria per poter scrivere le leggi di Kirchhoff alle maglie; per scrivere le equazioni alle maglie è necessario tenere presente l'orientamento del grafo, si consideri ad esempio la maglia di fig.8 (è possibile verificare con la definizione data che è effettivamente una maglia), fissando come verso di percorrenza quello che va da 1 a 2 si ha $-V_1 + V_2 + V_3 = 0$.

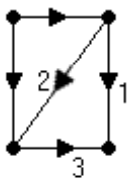


fig.8

Teorema di Tellegen

Tale teorema afferma che dato un grafo orientato con b lati, nell'ipotesi che le tensioni e le correnti di lato soddisfino le leggi di Kirchhoff, si ha $\sum_{k=1}^b v_k i_k = 0$, tale relazione è in accordo con il principio di conservazione dell'energia, infatti essa esprime il fatto che in un circuito la potenza netta è nulla.

Dimostrazione:

$Hp \begin{cases} LKT \\ LKI \end{cases} \Rightarrow Ts \left\{ \sum_{k=1}^b v_k i_k = 0 \right.$ consideriamo il grafo orientato di fig.1, ed assumiamo che il nodo 0 abbia potenziale zero, vale a dire $e_0 = 0$, tale nodo prende il nome di nodo di terra. Definiamo adesso i potenziali ai nodi come la d.d.p che c'è tra i nodi e il nodo di terra, supponiamo quindi di voler trovare il potenziale del nodo j, si ha $e_j = -v_3 - v_4$. Ovviamente è possibile seguire un percorso qualunque senza che il risultato cambi, di questo ne siamo certi grazie all'ipotesi LKT, infatti scegliendo la maglia formata dai lati 1-2-3-4 si ha $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 = 0 \Rightarrow -v_1 + v_2 = -v_3 - v_4$, il risultato ottenuto ci suggerisce che per raggiungere dal nodo j il nodo di terra, è possibile seguire indifferentemente i percorsi 3-4 e 1-2. Una volta definiti i potenziali ai nodi, è possibile mediante questi esprimere le tensioni di lato, ad esempio la tensione del lato orientato rappresentato in fig.2 è $v_k = e_a - e_b$. In generale dati due nodi a e b , diremo che

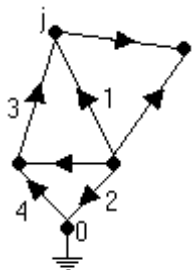


fig.1

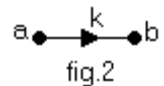


fig.2

fig.2 è $v_k = e_a - e_b$. In generale dati due nodi a e b , diremo che

$$i_{ab} = \begin{cases} i_k & \text{se il lato } k \text{ esce da } a \text{ ed entra in } b \\ -i_k & \text{se il lato } k \text{ esce da } b \text{ ed entra in } a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a questo punto è possibile scrivere

$v_k i_k = (e_a - e_b) i_{ab}$ (*) questa relazione è sicuramente corretta se la situazione è quella di fig.2, nel caso in cui il verso del lato è contrario rimane comunque corretta, infatti si ha $v_k i_k = -(e_a - e_b)(-i_{ab}) = (e_a - e_b) i_{ab}$. Ritornando alla (*) è possibile scrivere

$$v_k i_k = (e_a - e_b) i_{ab} = \frac{1}{2} [(e_a - e_b) i_{ab} + (e_b - e_a) i_{ba}] \quad (a) \text{ supponendo che nel grafo ci siano } n$$

nodì (escluso quello di terra), diremo che $\frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^n (e_a - e_b) i_{ab} = \sum_{k=1}^b v_k i_k$, la validità di tale scrittura può essere verificata osservando che al generico lato k corrisponde un termine del tipo (a). Dimostriamo che la sommatoria è nulla:

$$\frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^n (e_a - e_b) i_{ab} = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^n e_a i_{ab} - \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^n e_b i_{ab} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^n e_a \left(\sum_{b=1}^n i_{ab} \right) - \frac{1}{2} \sum_{b=1}^n e_b \left(\sum_{a=1}^n i_{ab} \right), \text{ ma per l'ipotesi}$$

LKI è possibile dire che $\begin{cases} \sum_{b=1}^n i_{ab} = 0 \rightarrow \text{correnti uscenti} \\ \sum_{a=1}^n i_{ab} = 0 \rightarrow \text{correnti entranti} \end{cases}$ pertanto il teorema è dimostrato.

Esempi:

Consideriamo le tensioni di lato ad un istante t , e le correnti ad un istante successivo $t + \delta$, è ancora possibile scrivere $\sum_{k=1}^b v_k(t) i_k(t + \delta) = 0$, questo in quanto le LKT e le LKI, continuano ad essere verificate.

Il teorema di Tellegen continua ad avere validità anche per il calcolo simbolico, si ha quindi $\sum_{k=1}^b \dot{V}_k \dot{I}_k = 0$, bisogna fare attenzione al fatto che questa quantità non è la

potenza. E' comunque possibile scrivere $\sum_{k=1}^b \dot{V}_k \dot{I}_k^\cup = 0 (**)$, questo in quanto anche le

\dot{I}_k^\cup sono valide le LKI.

Conseguenza del teorema di tellegen è inoltre il teorema di Boucherout, infatti se in un grafo sono presenti e generatori, la (**) può essere scritta come segue

$$-\sum_{k=1}^e \dot{V}_k \dot{I}_k^\cup = \sum_{k=e+1}^b \dot{V}_k \dot{I}_k^\cup \text{ questa relazione esprime l'uguaglianza tra due quantità}$$

complesse, e quindi l'uguaglianza tra due quantità reali e due immaginarie, in particolare la parte reale esprime il fatto che la potenza attiva erogata dai generatori è uguale a quella assorbita dal circuito, la parte immaginaria esprime la stessa cosa per la potenza reattiva. Bisogna comunque prestare attenzione al fatto che la (**) non dice che la potenza apparente erogata dai generatori è uguale a quella assorbita dal carico, infatti questo è vero solo se gli angoli caratteristici delle potenze complesse sono uguali.

Dato circuito con un solo generatore di fig.2, per il teorema di Tellegen è possibile

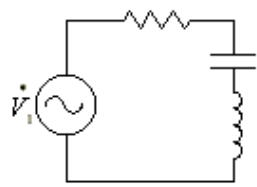


fig.2

scrivere $-\dot{V}_1 \dot{I}_1^\cup = \sum_{k=1}^b \bar{Z}_k I_k^2$, il primo termine rappresenta la potenza

complessa erogata dal generatore, è pertanto possibile notare che se le \bar{Z}_k sono resistenze, la potenza complessa sarà puramente

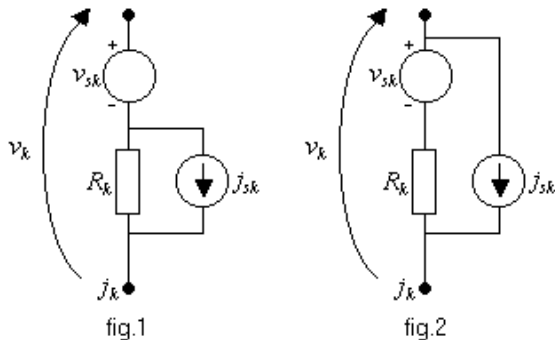
reale, se invece le \bar{Z}_k sono induttori la parte immaginaria della

sommatoria sarà positiva, e quindi la parte immaginaria della potenza complessa sarà

positiva, con lo stesso ragionamento è possibile concludere che nel caso in cui le \bar{Z}_k sono condensatori, la parte immaginaria della potenza complessa è negativa.

Metodi di analisi sistematici

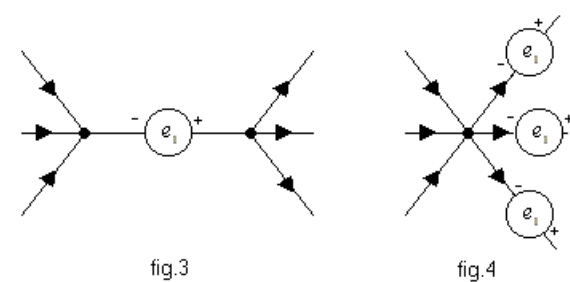
Prima di illustrare i metodi di analisi ai nodi e agli anelli, vediamo lo spostamento di generatori.



I circuiti di fig.1 e di fig.2, hanno la stessa caratteristica esterna, in particolare si ha $v_k = v_{sk} + R_k(j_k - j_{sk}) \Rightarrow j_k = j_{sk} + G_k(v_k - v_{sk})$

dove $G_k = \frac{1}{R_k}$, vedremo come sia possibile passare da uno all'altro applicando i risultati che troveremo.

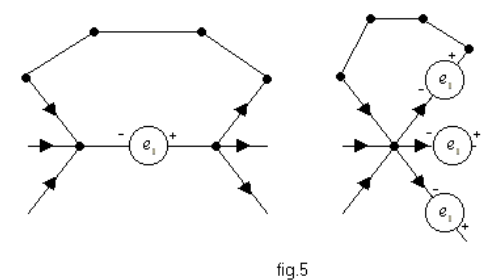
Supponiamo di essere nella situazione schematizzata in fig.3, vogliamo far vedere



che il circuito di fig.4 è equivalente, cioè che le soluzioni dei due circuiti coincidono. E' innanzitutto possibile osservare che le equazioni ai nodi nei due circuiti sono le stesse, tranne che per una combinazione lineare. Se indichiamo infatti con j_α le correnti entranti nel primo nodo di fig.3, e

con j_β quello uscenti, è possibile dire che $\sum j_\alpha = j$ e $\sum j_\beta = j$, da cui si ha $\sum j_\alpha = \sum j_\beta$, l'ultima relazione ottenuta non è altro che l'equazione al nodo di fig.4.

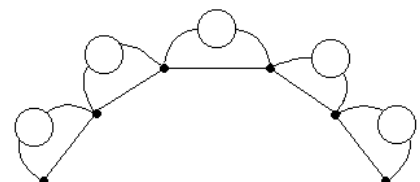
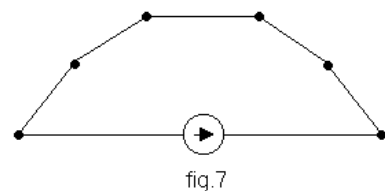
Per quanto riguarda le equazioni alle maglie basta applicare la seconda legge di K.



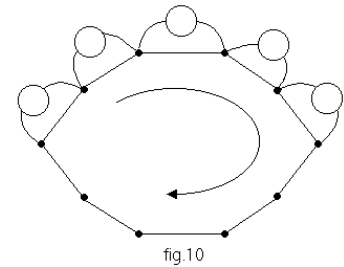
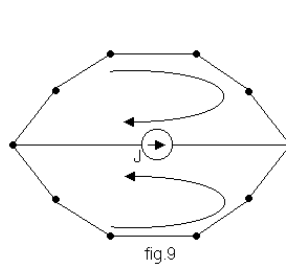
alle due maglie di fig.5 ed osservare che sono uguali, un altro caso potrebbe essere quello di fig.6, ma anche questa volta le

equazioni sono uguali, in quanto nella seconda maglia l'effetto dei due generatori è nullo (agiscono in senso opposto).

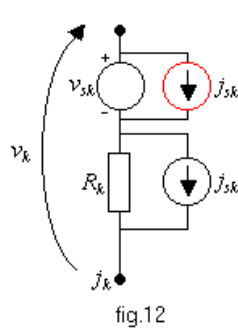
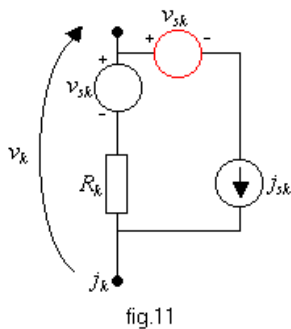
Vogliamo vedere adesso come sia possibile spostare un generatore di corrente, supponiamo di avere una maglia nella quale è presente un generatore di corrente come illustrato in fig.7, questa volta è necessario mettere in



parallelo il generatore ad ogni elemento del circuito di partenza come in fig.8. Anche in questo caso i due circuiti sono equivalenti, infatti le equazioni ai nodi e alle maglie non cambiano. Per quanto riguarda le prime, è immediato osservare che quelle ai nodi terminali sono le stesse, per quelle ai nodi intermedi basta notare che i generatori di corrente contribuiscono alle equazioni due volte, una volta con una corrente entrante e l'altra con una uscente, e quindi il loro contributo risultante è nullo. Per quanto riguarda le equazioni alle maglie, si ha che la somma delle due equazioni relative alle due maglie di fig.9, non è altro che l'equazione alla maglia relativa al circuito di fig.10.

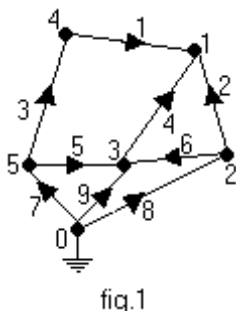


Vediamo adesso come ottenere il circuito di fig.2 a partire da quello di fig.1. Il generatore di fig.1 può essere spostato come mostrato in fig.11, fatto questo è possibile osservare che il generatore di tensione in rosso, può essere eliminato in quanto in serie ad un generatore ideale di corrente, il circuito che ne risulta è proprio quello di fig.2. Viceversa partendo dal circuito di fig.2, per quello detto sullo spostamento di un generatore di corrente, è possibile ottenere il circuito di fig.12, infine osservando che il generatore di corrente in rosso, può essere sostituito con un circuito aperto in quanto in parallelo ad un generatore di tensione ideale, si ottiene il circuito di fig.1.



Metodo dell'analisi ai nodi

Consideriamo il grafo connesso ed orientato di fig.1, le cui equazioni ai nodi sono:



$$\begin{aligned} \text{nodo 1)} \quad & j_1 + j_2 + j_4 = 0 \\ \text{nodo 2)} \quad & -j_2 - j_6 + j_8 = 0 \\ & \vdots \end{aligned}$$

Scrivendo le equazioni a tutti i nodi si ottiene un sistema di equazioni linearmente dipendenti, è possibile dimostrare che sopprimendo un'equazione (quella relativa al nodo di massa 0), le rimanenti sono linearmente indipendenti; ovviamente queste $n - 1$ equazioni non sono sufficienti a determinare tutte le correnti.

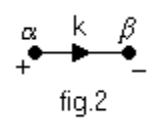
Scrivendo le $n-1$ equazioni ai nodi in forma matriciale si ottiene

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_m \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow A \cdot j = 0 \quad \text{dove } A \text{ prende il nome di}$$

matrice d'incidenza ridotta. Ogni elemento a_{ik} (con i indice di nodo e k indice di

$$\text{lato) di } A \text{ è dato da } a_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{se il lato } k \text{ non incide sul nodo } i \\ 1 & \text{se il lato } k \text{ esce dal nodo } i \\ -1 & \text{se il lato } k \text{ entra nel nodo } i \end{cases}.$$

Ricordando che dato il lato di fig.2 si ha $v_k = e_\alpha - e_\beta$, è possibile scrivere $v = A^T e$,



infatti una riga di A^T è una colonna di A , e poiché ad ogni colonna di A corrisponde un lato e un lato incide su due nodi, nella colonna non è possibile avere tre elementi nulli. In particolare nel caso in cui si hanno

$$\text{due elementi non nulli si ha } \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = e_\alpha - e_\beta = v_k, \text{ nel}$$

$$\text{caso invece di un solo elemento non nullo } \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = e_\gamma = v_l.$$

Le equazioni LKC e LKT non sono sufficienti a risolvere un circuito, in quanto esse sono legate alla topologia del circuito prescindendo dalla natura dei bipoli che lo compongono, è questo il motivo per cui sono necessarie le equazioni costitutive:

abbiamo visto che $j_k = j_{sk} + G_k(v_k - v_{sk})$ (a) con $k=1, \dots, b$, definendo i vettori

$$j_s = \begin{pmatrix} j_{s1} \\ \vdots \\ j_{sb} \end{pmatrix} \text{ e } V_s = \begin{pmatrix} v_{s1} \\ \vdots \\ v_{sb} \end{pmatrix} \text{ è possibile scrivere la (a) in forma matriciale } j = j_s + G(V - V_s)$$

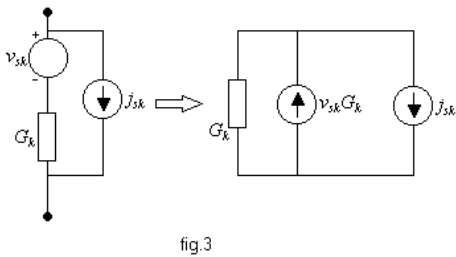
(b), dove nel caso più generale G è una matrice i cui termini sono ammettenze, e per questo prende il nome di matrice di ammettenza di lato. Moltiplicando primo e secondo membro della (b) per A , e tenendo conto della LKC si ha $Aj = Aj_s + AGV - AGV_s = 0$ ancora tenendo conto di quanto ottenuto e della LKT si ottiene $Aj_s - AGV_s + AGA^T e = 0 \Rightarrow AGA^T e = AGV_s - Aj_s$ (c), quest'ultima espressione rappresenta proprio le equazioni che cercavamo e quindi ci permette di risolvere il circuito in maniera univoca. Definiamo matrice di ammettenze di nodo la matrice di ordine $(n-1) \times (n-1)$ $Y_n = AGA^T$, inoltre ponendo $b_s = AGV_s - Aj_s$ la (c) diventa $Y_n e = b_s$. Dimostriamo adesso che se G è una matrice simmetrica e definita positiva, lo è anche Y_n :

ricordiamo innanzitutto che se una matrice è simmetrica se coincide con la trasposta, troviamo la trasposta della matrice delle ammettenze di nodo, si ha $Y_n^T = AG^T A^T$, ma essendo G per ipotesi simmetrica si ha $G^T = G$, per cui $Y_n^T = AGA^T = Y_n$. Ci rimane da

dimostrare che y_n è definita positiva, cioè è necessario far vedere che $\forall x \in R - \{0\} \Rightarrow x^T Y_n x > 0$, ricordando come è definita Y_n è possibile dire che deve essere $x^T A G A^T x > 0$ (d), a questo punto dovendo essere $A^T x \neq 0$ (poiché $x \neq 0$), e A^T è a rango pieno (in quanto matrice relativa ad un sistema di equazioni linearmente indipendenti), ponendo $y = A^T x$ la (d) diventa $y^T G y > 0$ c.v.d.

E' possibile dimostrare che y_n coincide con la matrice delle conduttanze definita nel metodo del potenziale ai nodi, infatti ricordando che $y_n = A G A^T$, ed essendo

$(AG)_{ik} = \sum_{l=1}^b a_{il} G_l \delta_{kl} = a_{ik} G_k$, è possibile scrivere $y_{ij} = \sum_{k=1}^b (a_{ik} a_{jk}) G_k$. Se $i \neq j$ questa quantità non è altro che la somma, cambiata di segno, delle conduttanze relative ai lati che uniscono il nodo i al nodo j , cambiata di segno in quanto nell'ipotesi che a_{ik} e a_{jk} siano diversi da zero, essendo elementi della stessa colonna valgono sempre 1 e -1, pertanto il loro prodotto è sempre -1. Troviamo adesso gli elementi della diagonale principale, si ha $y_{ii} = \sum_{k=1}^b a_{ik} (a_{ik} G_k) = \sum_{k=1}^b (a_{ik})^2 G_k$ questa quantità è la somma delle conduttanze relative ai lati che incidono sul nodo i , è quindi chiaro che la y_n è proprio la matrice delle conduttanze.



Abbiamo pertanto dato un significato al primo membro delle equazioni sostitutive $y_n e = b_s$, per quanto riguarda la matrice dei termini noti b_s , consideriamo il generico lato, e trasformiamo il generatore di tensione in un generatore di corrente, come mostrato in fig.3. Ricordando che

$b_s = A(GV_s - j_s)$ ed essendo $GV_s - j_s = \begin{cases} G_1 v_{s1} - j_{s1} \\ G_2 v_{s2} - j_{s2} = \tilde{j}_s \\ \dots\dots\dots \end{cases}$ le equazioni diventano

$AGA^T e = \tilde{A} \tilde{j}_s$ da cui segue che $(\tilde{A} \tilde{j}_s)_i = \sum_{k=1}^b a_{ik} \tilde{j}_{sk}$, questa rappresenta la somma delle correnti erogate dai generatori di corrente equivalenti che incidono al nodo i , il cui segno dipende dal verso, i termini non nulli sono quelli in cui $a_{ik} \neq 0$.

Facciamo vedere che partendo dalle leggi di Kirchhof nella forma $\begin{cases} \text{LKC} \rightarrow A j = 0 \\ \text{LKT} \rightarrow V = A^T e \end{cases}$

è possibile ricavare il teorema di Tellegen, è pertanto necessario riuscire a dimostrare

che $\sum_{k=1}^b v_k j_k = 0$. Ricordiamo che V e j sono due vettori colonna così fatti, $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_b \end{pmatrix}$ e

$j = \begin{pmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_b \end{pmatrix}$, tenendo conto di questi e delle LKC e LKT, è possibile scrivere

$$\sum_{k=1}^b v_k j_k = V^T j = (A^T e)^T j = e^T (A j) = 0 \quad \text{c.v.d.}$$

Metodo di analisi agli anelli

Si definisce grafo topologico, un grafo disegnato in maniera particolare, per esempio i grafi fig.1 sono uguali, ma sono topologicamente differenti, cioè ognuno di essi rappresenta un particolare grafo topologico.

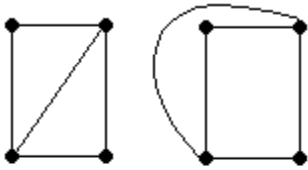


fig.1

Un grafo si dice planare, se può essere rappresentato sul piano senza che ci sia intersezione tra due lati in un punto che non sia un nodo.

Un grafo si dice articolato, se esistono due sottografi la cui unione è il grafo stesso, e la cui intersezione è un nodo, in fig.2 è riportato un esempio di grafo articolato.

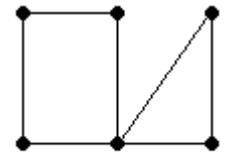


fig.2

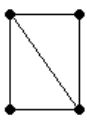


fig.3

Dato un grafo connesso, topologico, planare e non articolato, si definisce anello una maglia la cui regione da essa delimitata non contiene né nodi né lati, ad esempio il grafo di fig.3 è formato da due anelli. Si definisce anello esterno una maglia al di fuori della quale non c'è nessun lato, ovviamente nel caso in cui nel grafo vi è un solo anello, esso è sia esterno che interno.

Dimostriamo il teorema fondamentale dei grafi, secondo il quale $l = b - n + 1$, dove l è il numero di anelli, b il numero di lati, n il numero di nodi. Questo teorema si dimostra per induzione, vale a dire: si verifica la validità per $l=1$, si suppone verificato per un numero generico l di anelli, ed infine si verifica sotto tale ipotesi che sia valido per $l+1$ anelli.

Per un anello è immediato verificare che si ha $n = b$, per cui applicando il teorema si ottiene $l = b - n + 1 = 1$. Supponiamo adesso che gli anelli siano $l+1$, scegliendone due qualsiasi ed eliminando i lati (ed i nodi presenti nei lati), comuni ai due anelli, si passa da un grafo nel quale sono presenti $l+1$ anelli, ad un grafo con l anelli, per il teorema fondamentale dei grafi si ha $l = b' - n' + 1$ (a), dove b' ed n' sono il numero di lati e nodi rimanenti, ricordando a questo punto che la (a) è vera per ipotesi (fa parte delle ipotesi da usare nell'applicare il principio d'induzione), ed osservando che avendo cancellato k lati si ha $b' = b - k$ ed $n' = n - (k-1)$ è possibile scrivere $b - n + 1 = b' + k - n' - k + 1 + 1 = l + 1$ c.v.d.

Si definisce grafo duale di un grafo connesso, planare, topologico e non articolato, il grafo che si ottiene associando

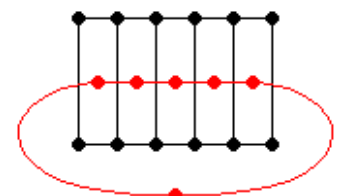


fig.4

ad ogni anello (compreso quello esterno) un nodo, ad ogni lato (comune a due anelli) un altro lato, schematicamente si ha:

$$G \text{ (grafo di partenza)} \leftrightarrow \hat{G} \text{ (grafo duale)}$$

$$\text{anelli} \leftrightarrow \text{nodi}$$

$$\text{lato} \leftrightarrow \text{lato}$$

$$\text{nodi} \leftrightarrow \text{anelli}$$

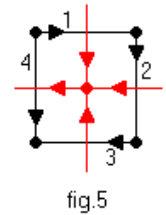
in fig.4 è riportato un esempio di grafi duali.

Per orientare i lati del grafo duale, bisogna tenere presente la convenzione secondo la quale, i lati del grafo duale sono ruotati di 90° in senso orario rispetto ai lati, appartenenti al grafo di partenza, a cui essi sono associati.

Esiste una corrispondenza tra le equazioni agli anelli del grafo di partenza e quelle ai nodi del grafo duale:

dati i grafi di fig.5 (il rosso è il duale del nero) si ha

$$\begin{cases} \hat{j}_1 + \hat{j}_2 + \hat{j}_3 - \hat{j}_4 = 0 & \text{(per il grafo duale)} \\ v_1 + v_2 + v_3 - v_4 = 0 & \text{(per il grafo di partenza)} \end{cases}$$



Indichiamo con M la matrice d'incidenza agli anelli del grafo di partenza, ogni

elemento di essa è così fatto

$$m_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{se il lato } k \notin \text{all'anello } i \\ 1 & \text{se il lato } k \in \text{all'anello } i \text{ e ha come verso il verso di percorrenza dell'anello} \\ -1 & \text{se il lato } k \in \text{all'anello } i \text{ e ha come verso il verso opposto a quello di percorrenza dell'anello} \end{cases}$$

Per quanto detto M coincide con la matrice d'incidenza dei nodi relativa al grafo duale, si ha cioè $M = \hat{A}$, la matrice d'incidenza \hat{A} è completa se M contiene tutte le equazioni agli anelli, compreso quello esterno. Se escludo l'anello esterno, M prende il nome di matrice agli anelli ridotta, inoltre se all'anello esterno faccio coincidere il nodo di massa, anche la \hat{A} diventa la matrice d'incidenza ai nodi ridotta. A questo punto è possibile scrivere la relazione di dualità $\hat{A}\hat{j} = 0 \Leftrightarrow MV = 0$, per quanto riguarda le tensioni di lato si ha invece $\hat{V} = \hat{A}^T \hat{e} \Leftrightarrow j = M^T i$ (*), dove i sono le correnti d'anello (correnti fittizie non misurabili).

Ricordiamo la relazione $j = j_s + G(V - V_s)$, sfruttando la dualità è possibile scrivere

$$V = V_s + R(j - j_s), \text{ moltiplicando per } M \text{ si ottiene } MV = MV_s + MR(j - j_s) = 0$$

ricordando la (*) è possibile scrivere

$$MV_s + MR(M^T i - j_s) = 0 \Rightarrow MV_s + MRM^T i - MRj_s = 0 \quad (**),$$

ponendo $MRM^T = Z_n$ e $MRj_s - MV_s = b$ la (**) diventa

$Z_n i = b$, Z_n prende il nome di matrice d'impedenza degli anelli.

La matrice Z_n , per analogia con il metodo di analisi ai nodi, è così fatta:

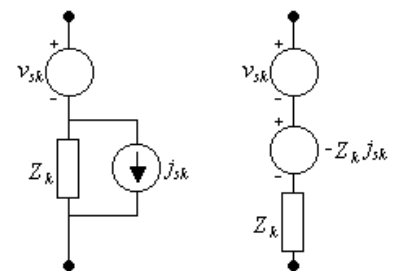


fig.7

i termini sulla diagonale principale sono $Z_{ii} = \sum_{k \in i} Z_k$, gli altri $Z_{ij} = \sum_{k \in (i \cap j)} Z_k$, con i e j indici di anello, k indice di lato.

Il termine noto $MRj_s - MV_s = b$ rappresenta invece la somma dei generatori di tensione e di corrente trasformati in tensione (vedi fig.7), relativi ai lati appartenenti all'anello in questione. Dalla figura è quindi possibile osservare che le tensioni da associare ai generatori di corrente è $v'_{sk} = v_{sk} - Z_k j_{sk}$, si ha cioè $MRj_s - MV_s = -MV'_s$.