

- Mutue Induttanze -

(Praticò Andrea)

7 giugno 2002

Indice

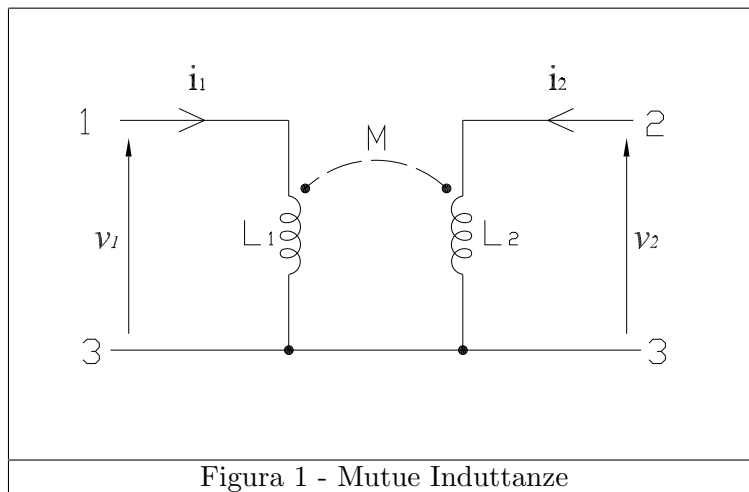
1	Circuiti Equivalenti	2
1.1	Circuito Equivalente a T	2
1.2	Circuito Equivalente a π (P-greca)	3
1.3	Convenzioni	5
1.4	Fattore d'Accoppiamento	5
1.5	Mutue Induttanze in Trifase	6
1.6	Considerazioni Energetiche	8
1.7	Mutue Induttanze in Trifase,caso Generale	9
1.8	Mutue Induttanze con B2 Spice	14

Capitolo 1

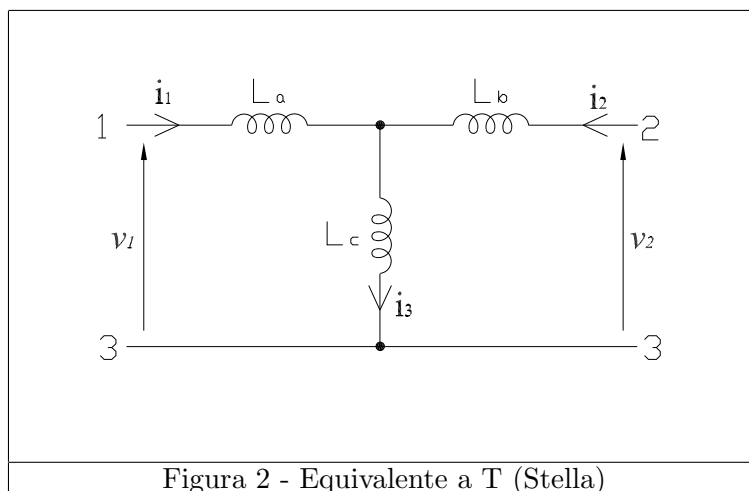
Circuiti Equivalenti

1.1 Circuito Equivalente a T

Date due induttanze accoppiate mutuamente fra loro secondo lo schema seguente:



in cui si noti che un terminale di ciascuna induttanza è allo stesso potenziale. Un accoppiamento di tal genere può essere considerato equivalente ad un'inserzione di semplici autoinduttanze collegate a T (Stella), come indicato nella figura seguente:



in maniera tale da eliminare la presenza di accoppiamenti magnetici, e considerando la rete globale come un semplice circuito interessato da grandezze puramente elettriche.

Dallo schema di Figura 1 si hanno le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} v_1 &= L_1 Di_1 + M Di_2 \\ v_2 &= M Di_1 + L_2 Di_2 \end{cases}$$

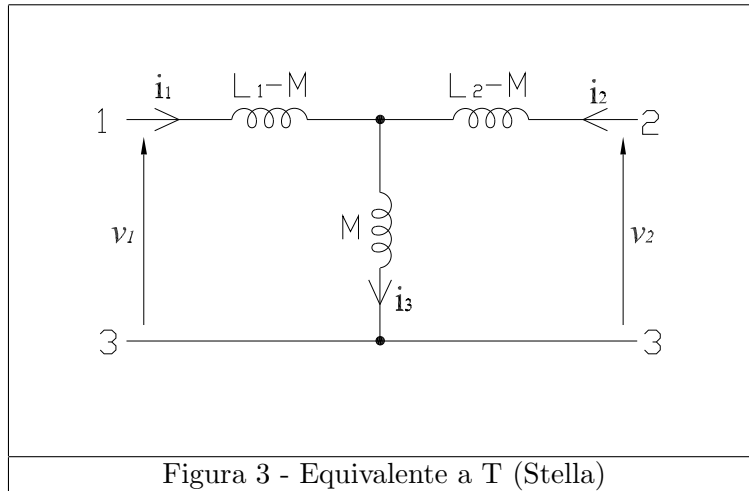
Mentre da quello di Figura 2 si ha:

$$\begin{cases} v_1 &= L_a Di_1 + L_c Di_3 \\ v_2 &= L_b Di_2 + L_c Di_3 \\ i_3 &= i_1 + i_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 &= (L_a + L_c) Di_1 + L_c Di_2 \\ v_2 &= L_c Di_1 + (L_b + L_c) Di_2 \end{cases}$$

Quindi, confrontando i due sistemi di equazioni:

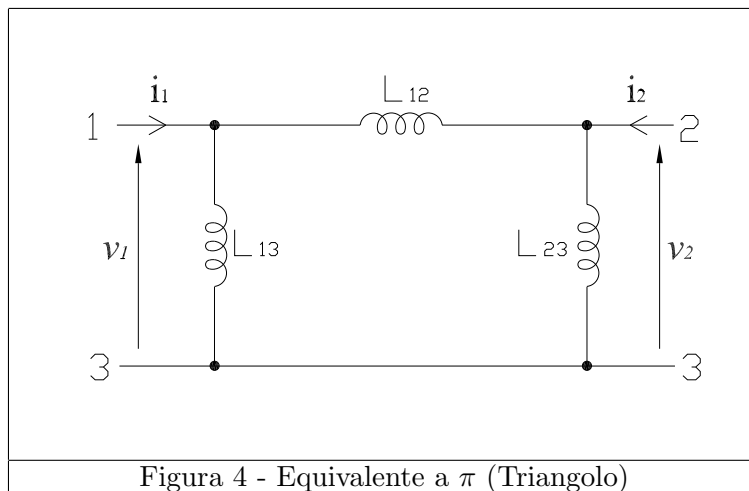
$$\begin{cases} L_a + L_c &= L_1 \\ L_c &= M \\ L_b + L_c &= L_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_a &= L_1 - M \\ L_c &= M \\ L_b &= L_2 - M \end{cases}$$

Ovvero il circuito equivalente a T dell'accoppiamento Mutuo è il seguente:



1.2 Circuito Equivalente a π (P-greca)

Come per il circuito equivalente a T, esiste anche quello cosiddetto a P-greca, che ha la seguente conformazione:



per trovare i valori equivalenti delle induttanze, si studia l'equivalenza fra il circuito a T, precedentemente ricavato, e quest'ultimo a π .

Affinchè sussista l'equivalenza si deve imporre che l'impedenza operativa vista da due terminali corrispondenti, sia uguale per i due circuiti; ovvero:

osservando lo schema di Figura 3, si nota come l'impedenza operativa vista dai terminali 1,3, valga:

$$L_{13}^* D = (L_1 D - MD) + MD \Rightarrow L_{13}^* = L_1$$

analogamente:

$$L_{23}^* D = (L_2 D - MD) + MD \Rightarrow L_{23}^* = L_2$$

$$L_{12}^* D = (L_1 D - MD) + (L_2 D - MD) \Rightarrow L_{12}^* = L_1 + L_2 - 2M$$

Dal circuito di Figura 4, si ha:

$$L_{13}^* D = \frac{L_{13} D (L_{12} D + L_{23} D)}{L_{12} D + L_{23} D + L_{13} D}$$

cioè il Parallelo tra L_{13} e la Serie L_{12}, L_{23} .

Analogamente:

$$L_{23}^* D = \frac{L_{23} D (L_{12} D + L_{13} D)}{L_{12} D + L_{23} D + L_{13} D}$$

$$L_{12}^* D = \frac{L_{12} D (L_{13} D + L_{23} D)}{L_{12} D + L_{23} D + L_{13} D}$$

quindi si hanno le seguenti corrispondenze:

$$L_1 = \frac{L_{13}(L_{12} + L_{23})}{L_{12} + L_{23} + L_{13}} \quad (1.1)$$

$$L_2 = \frac{L_{23}(L_{12} + L_{13})}{L_{12} + L_{23} + L_{13}} \quad (1.2)$$

$$L_1 + L_2 - 2M = \frac{L_{12}(L_{13} + L_{23})}{L_{12} + L_{23} + L_{13}}$$

Dalla terza si ricava:

$$M = \frac{L_{13} L_{23}}{L_{12} + L_{23} + L_{13}} \quad (1.3)$$

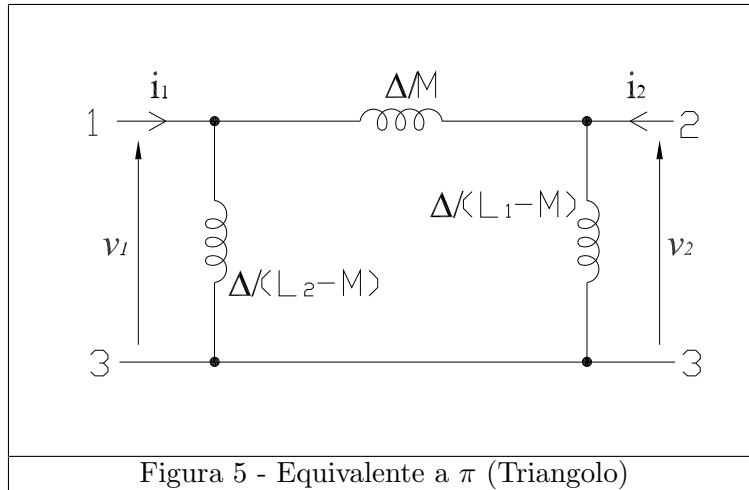
Si pone

$$\Delta = L_1 L_2 - M^2 \Rightarrow \Delta = \frac{L_{12} L_{23} L_{13}}{L_{12} + L_{23} + L_{13}} \Rightarrow$$

$$L_{12} + L_{23} + L_{13} = \frac{L_{12} L_{23} L_{13}}{\Delta} \quad (1.4)$$

Sostituendo quest'ultima nelle precedenti (1.1),(1.2),(1.3), si ricavano le corrispondenze cercate:

$$\begin{aligned} L_{12} &= \frac{\Delta}{M} \\ L_{23} &= \frac{\Delta}{L_1 - M} \\ L_{13} &= \frac{\Delta}{L_2 - M} \end{aligned}$$



1.3 Convenzioni

Bisogna tenere presente che considerando il circuito equivalente dell'accoppiamento mutuo (sia a T che a π) potrebbe verificarsi che un'auto induttanza acquisti valore negativo; ciò fisicamente non ha alcun significato, ma discende dal fatto che il coefficiente di mutua induttanza può essere negativo.

E' necessario, a tal proposito, imporre delle convenzioni sul segno del coefficiente M ; tali convenzioni sono:

$$\begin{aligned} M > 0 & \quad \text{Se i contrassegni stanno dalla stessa parte.} \\ M < 0 & \quad \text{Se i contrassegni stanno da parti opposte.} \end{aligned}$$

(Rispetto al Nodo Equipotenziale)

Per esempio, con riferimento alla Figura 1, risulta $M > 0$ indipendentemente dalle correnti.

Tutte le equazioni viste fin'ora, devono essere considerate con M in valore relativo (e non assoluto) quindi in caso di $M < 0$, là dove si legge $-M$ si avrà: $-(-|M|) = |M|$.

1.4 Fattore d'Accoppiamento

Si definisce Fattore d'Accoppiamento il termine:

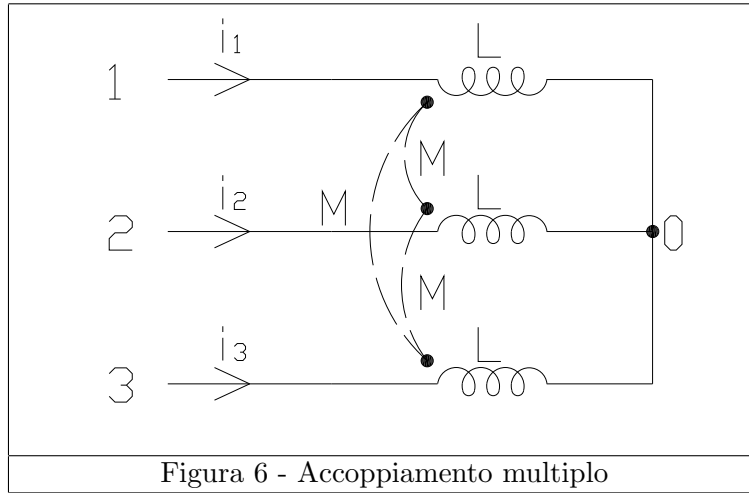
$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

Questo parametro è indicativo del tipo di accoppiamento, ovvero dell'entità dei Flussi Dispersi; intendendo con quest'ultimo termine quella quantità di Flusso Magnetico che, prodotto da un avvolgimento, non si concatena con l'altro (questo avviene poichè le linee di flusso si richiudono prima di incontrare l'altro avvolgimento). Il fattore d'accoppiamento è unitario ($|k| = 1$) soltanto in condizioni di accoppiamento perfetto (assenza di flussi dispersi; si intuisce come questo sia un caso limite ed ideale; nella realtà non esistono accoppiamenti di tal genere! L'intervallo di variabilità del fattore d'accoppiamento è:

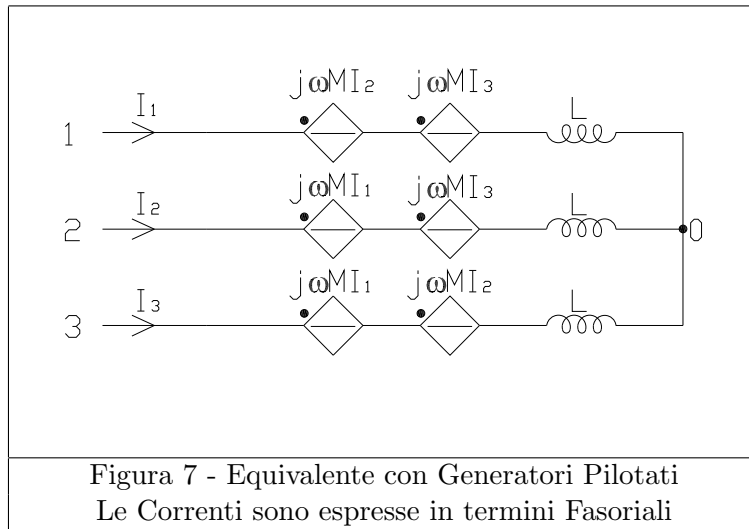
$$-1 < k < 1$$

1.5 Mutue Induttanze in Trifase

Sia dato il seguente schema circuitale:



che con l'ausilio dei generatori pilotati diviene:



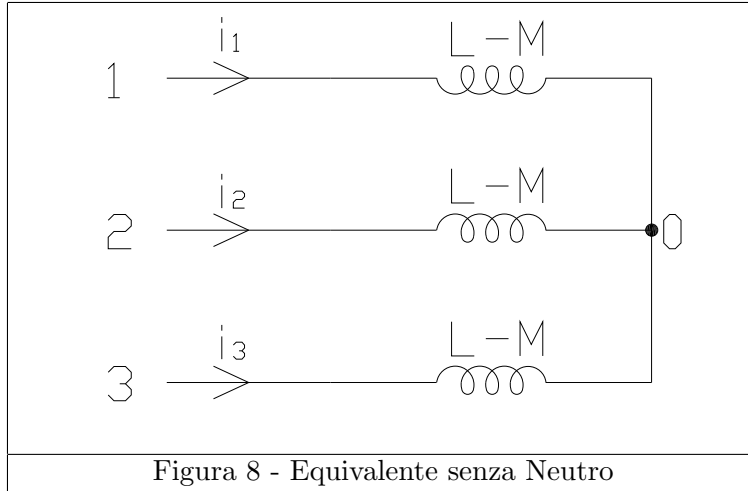
Le equazioni di Equilibrio sono:

$$\begin{cases} \dot{V}_{10} &= j\omega L \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_3 \\ \dot{V}_{20} &= j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_3 \\ \dot{V}_{30} &= j\omega M \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 + j\omega L \dot{I}_3 \\ \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 &= 0 \end{cases}$$

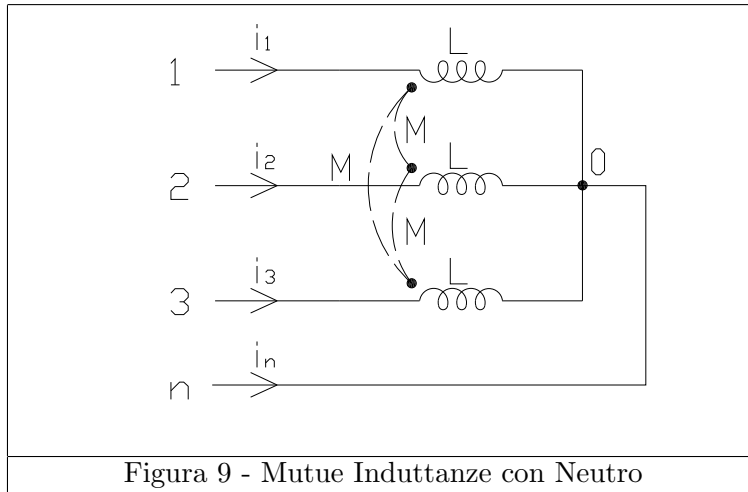
Considerando che $\dot{I}_2 + \dot{I}_3 = -\dot{I}_1$, $\dot{I}_1 + \dot{I}_3 = -\dot{I}_2$ e $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = -\dot{I}_3$, si ha:

$$\begin{cases} \dot{V}_{10} &= j\omega(L - M)\dot{I}_1 \\ \dot{V}_{20} &= j\omega(L - M)\dot{I}_2 \\ \dot{V}_{30} &= j\omega(L - M)\dot{I}_3 \end{cases}$$

Ovvero il circuito con mutue induttanze in assenza del quarto conduttore (Neutro), può essere schematizzato nel seguente modo:



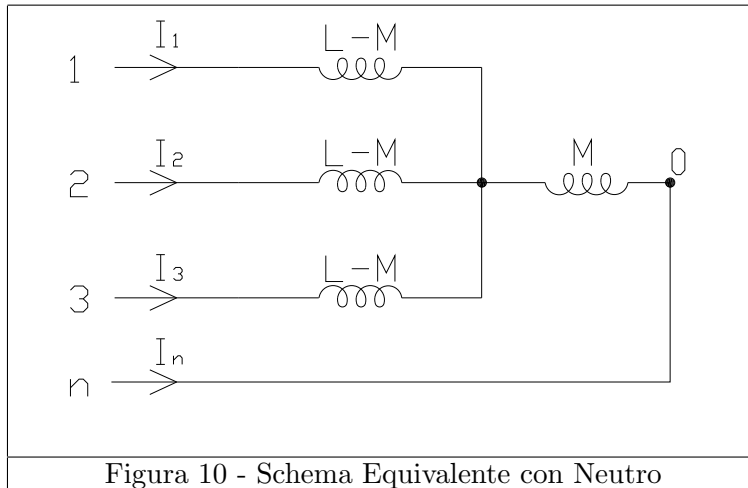
Consideriamo adesso lo stesso schema precedente, con l'aggiunta del quarto conduttore (Neutro):



Le equazioni di Equilibrio sono del tutto analoghe a quelle viste precedentemente, con l'unica differenza nella sommatoria delle correnti, che ora risulta: $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dot{I}_n = 0$. Con analoghe considerazioni si arriva al seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \dot{V}_{10} = j\omega(L - M)\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_n \\ \dot{V}_{20} = j\omega(L - M)\dot{I}_2 - j\omega M\dot{I}_n \\ \dot{V}_{30} = j\omega(L - M)\dot{I}_3 - j\omega M\dot{I}_n \end{cases}$$

Da cui segue immediatamente lo schema equivalente:



Da notare che il potenziale O, non giace sul centro stella equivalente (che fra l'altro è un nodo che non esiste fisicamente), ma sull'estremo opposto dell'induttanza M.

1.6 Considerazioni Energetiche

Dato un doppio bipolo costituito da due mutue induttanze (non necessariamente con terminale equipotenziale) si voglia determinare il valore dell'energia Media immagazzinata nei campi magnetici di auto e mutua induzione. Si è visto che le relazioni che legano le varie grandezze elettriche del doppio bipolo sono:

$$\begin{cases} v_1(t) &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2(t) &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

La potenza Istantanea che compete al doppio bipolo, è:

$$P(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t)$$

e quindi

$$P(t) = L_1 i_1(t) \frac{di_1}{dt} + M [i_1(t) \frac{di_2}{dt} + i_2(t) \frac{di_1}{dt}] + L_2 i_2(t) \frac{di_2}{dt}$$

L'Energia istantanea è data dall'integrale della Potenza istantanea; prendiamo $t_0 = 0$ l'istante iniziale:

$$W(t) = \int_0^t P(\tau) d\tau = \int_0^t L_1 i_1(\tau) \frac{di_1}{d\tau} d\tau + M \int_0^t [i_1(\tau) \frac{di_2}{d\tau} + i_2(\tau) \frac{di_1}{d\tau}] d\tau + \int_0^t L_2 i_2(\tau) \frac{di_2}{d\tau} d\tau$$

$$W(t) = L_1 \int_{i_1(0)}^{i_1(t)} i_1 di_1 + M \int_a^b [i_1 di_2 + i_2 di_1] + L_2 \int_{i_2(0)}^{i_2(t)} i_2 di_2$$

(con a e b opportuni estremi di integrazione). Si osservi che la quantità $i_1 di_2 + i_2 di_1$ è il differenziale di $i_1 \cdot i_2$, ovvero:

$$d(i_1 \cdot i_2) = i_1 di_2 + i_2 di_1$$

quindi:

$$W(t) = L_1 \int_{i_1(0)}^{i_1(t)} i_1 di_1 + M \int_{i_1(0)i_2(0)}^{i_1(t)i_2(t)} d(i_1 i_2) + L_2 \int_{i_2(0)}^{i_2(t)} i_2 di_2$$

$$W(t) = \frac{1}{2} L_1 [i_1^2(t) - i_1^2(0)] + M [i_1(t)i_2(t) - i_1(0)i_2(0)] + \frac{1}{2} L_2 [i_2^2(t) - i_2^2(0)]$$

Supponendo che, all'istante $t = 0$, il circuito sia privo di energia (scarico), ovvero ponendo $i_1(0) = i_2(0) = 0$; si ha che l'Energia Istantanea associata a tale accoppiamento mutuo è data dalla relazione:

$$W(t) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) + M i_1(t) i_2(t)$$

Supponiamo adesso che le due correnti i_1 ed i_2 siano sinusoidali:

$$\begin{cases} i_1(t) &= I_{1M} \sin(\omega t + \varphi_1) \\ i_2(t) &= I_{2M} \sin(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

Sostituendo questi valori nell'espressione dell'Energia Istantanea, precedentemente determinata, si ha:

$$W(t) = \frac{1}{2} L_1 (I_{1M})^2 \sin^2(\omega t + \varphi_1) + \frac{1}{2} L_2 (I_{2M})^2 \sin^2(\omega t + \varphi_2) + M I_{1M} I_{2M} \sin(\omega t + \varphi_1) \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Ricordando che $\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$ e che $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$ si ottiene che l'Energia istantanea è la somma sei seguenti tre addendi:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}L_1(I_{1M})^2 \frac{1-\cos(2\omega t+2\varphi_1)}{2} \\ \frac{1}{2}L_2(I_{2M})^2 \frac{1-\cos(2\omega t+2\varphi_2)}{2} \\ MI_{1M}I_{2M}\frac{1}{2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) - \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)] \end{cases}$$

Da cui si deducono facilmente i valori medi in un periodo, la cui somma dà l'energia Media immagazzinata nei Campi Magnetici:

$$W_m = \frac{1}{4}L_1(I_{1M})^2 + \frac{1}{4}L_2(I_{2M})^2 + \frac{1}{2}MI_{1M}I_{2M}\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Ovvero, con riferimento ai valori Efficaci:

$$W_m = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

1.7 Mutue Induttanze in Trifase,caso Generale

Affronteremo in questa sezione il caso generico in cui i tre coefficienti di Auto e Mutua induzione siano diversi tra loro. Sia dato il seguente sistema a tre conduttori:

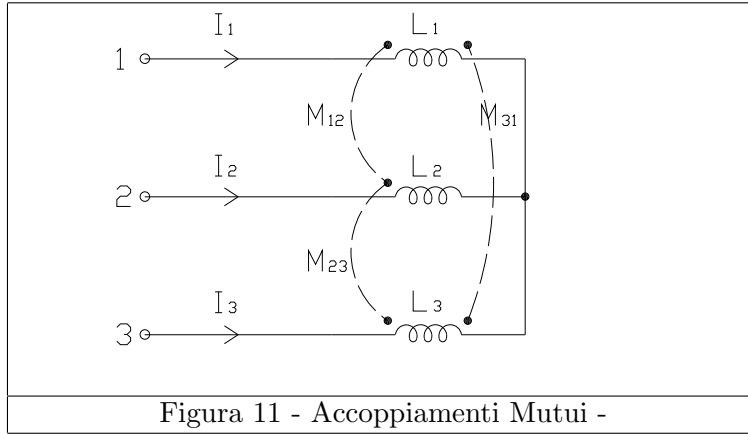


Figura 11 - Accoppiamenti Mutui -

Applicando il metodo delle Correnti di Maglia:

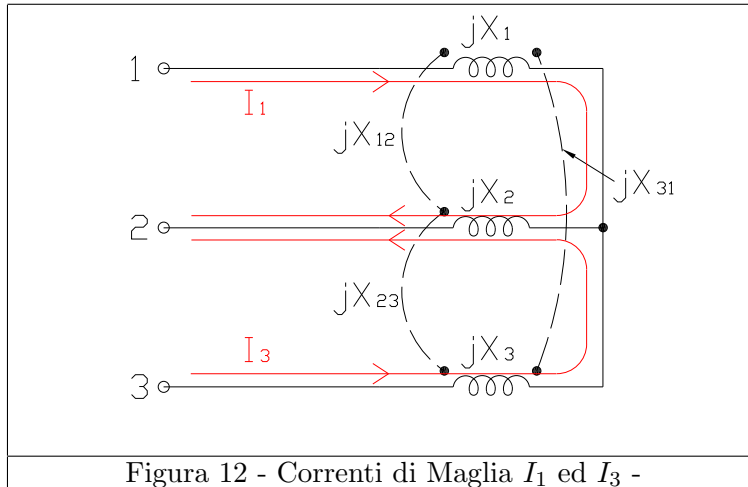


Figura 12 - Correnti di Maglia I_1 ed I_3 -

dove si sono poste le seguenti relazioni:

$$X_1 = \omega L_1 \quad X_2 = \omega L_2 \quad X_3 = \omega L_3$$

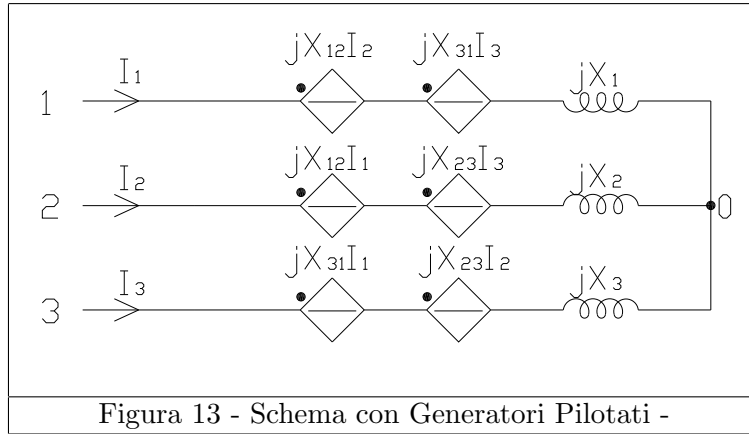
$$X_{12} = \omega M_{12} \quad X_{23} = \omega M_{23} \quad X_{31} = \omega M_{31}$$

(i valori dei coefficienti di mutua induzione sono da considerarsi in valore relativo) Con riferimento alla Figura 12 si ha:

$$\dot{V}_{12} = j(X_1 + X_2 - 2X_{12})\dot{I}_1 + j(X_{31} - X_{23} + X_2 - X_{12})\dot{I}_3$$

$$\dot{V}_{32} = j(X_{31} - X_{23} + X_2 - X_{12})\dot{I}_1 + j(X_3 + X_2 - 2X_{23})\dot{I}_3$$

Il segno $-$ per la X_{12} (come anche il segno negativo per la X_{23}) è dovuto al fatto che, con le convenzioni dei segni delle correnti di maglia, le corrispettive cadute di mutua sono negative; per convincersi di ciò è conveniente operare l'analisi circuitale facendo ricorso allo schema delle mutue induttanze equivalente con generatori pilotati:



da cui:

$$\dot{V}_{12} = jX_1\dot{I}_1 + jX_{12}\dot{I}_2 + jX_{31}\dot{I}_3 - jX_2\dot{I}_2 - jX_{12}\dot{I}_1 - jX_{23}\dot{I}_3$$

$$\dot{V}_{32} = jX_{31}\dot{I}_1 + jX_{23}\dot{I}_2 + jX_3\dot{I}_3 - jX_2\dot{I}_2 - jX_{12}\dot{I}_1 - jX_{23}\dot{I}_3$$

Considerando che si tratta di un sistema a tre conduttori, si ha:

$$(\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0 \Rightarrow \dot{I}_2 = -\dot{I}_1 - \dot{I}_3)$$

si sostituisce nelle precedenti equazioni, ottenendo:

$$\dot{V}_{12} = j(X_1 + X_2 - 2X_{12})\dot{I}_1 + j(X_2 + X_{31} - X_{12} - X_{23})\dot{I}_3$$

$$\dot{V}_{32} = j(X_2 + X_{31} - X_{12} - X_{23})\dot{I}_1 + j(X_2 + X_3 - 2X_{23})\dot{I}_3$$

Come precedentemente ricavato.

Ponendo

$$\begin{aligned} \bar{z}_{11} &= j(X_1 + X_2 - 2X_{12}) & \bar{z}_{12} &= j(X_2 + X_{31} - X_{12} - X_{23}) \\ \bar{z}_{21} &= \bar{z}_{12} = j(X_2 + X_{31} - X_{12} - X_{23}) & \bar{z}_{22} &= j(X_2 + X_3 - 2X_{23}) \end{aligned}$$

si può esprimere il sistema in forma matriciale:

$$\begin{vmatrix} \dot{V}_{12} \\ \dot{V}_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{z}_{11} & \bar{z}_{12} \\ \bar{z}_{21} & \bar{z}_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{z}_{11} & \bar{z}_{12} \\ \bar{z}_{21} & \bar{z}_{22} \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} \dot{V}_{12} \\ \dot{V}_{32} \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

Si desidera ricavare i valori delle Ammettenze equivalenti a triangolo:

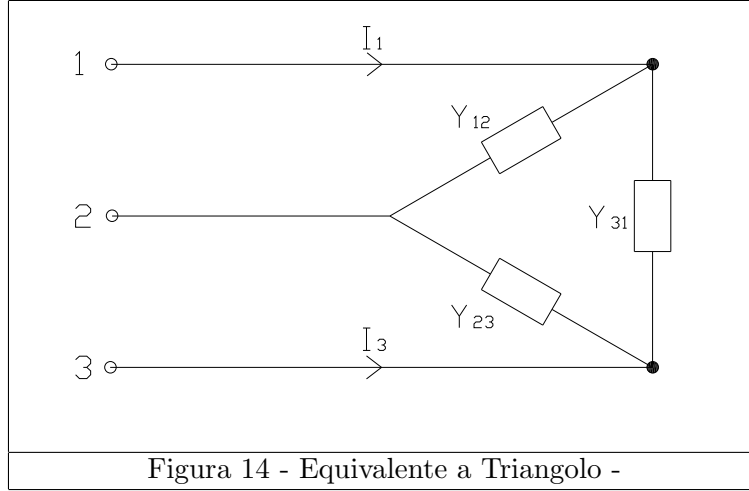


Figura 14 - Equivalente a Triangolo -

Applicando il metodo nodale ai nodi 1 e 3 (prendendo come riferimento il nodo 2), si ha:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= (\bar{Y}_{12} + \bar{Y}_{31})\dot{V}_{12} - \bar{Y}_{31}\dot{V}_{32} \\ \dot{I}_3 &= -\bar{Y}_{31}\dot{V}_{12} + (\bar{Y}_{23} + \bar{Y}_{31})\dot{V}_{32} \end{aligned}$$

ovvero, in forma matriciale:

$$\begin{vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{y}'_{11} & \bar{y}'_{12} \\ \bar{y}'_{21} & \bar{y}'_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{V}_{12} \\ \dot{V}_{32} \end{vmatrix} \quad (1.6)$$

dove si è posto:

$$\begin{aligned} \bar{y}'_{11} &= \bar{Y}_{12} + \bar{Y}_{31} & \bar{y}'_{12} &= -\bar{Y}_{31} \\ \bar{y}'_{21} &= -\bar{Y}_{31} & \bar{y}'_{22} &= \bar{Y}_{23} + \bar{Y}_{31} \end{aligned}$$

Confrontando la (1.5) con la (1.6), si deduce che:

$$\begin{vmatrix} \bar{z}_{11} & \bar{z}_{12} \\ \bar{z}_{21} & \bar{z}_{22} \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} \bar{y}'_{11} & \bar{y}'_{12} \\ \bar{y}'_{21} & \bar{y}'_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \bar{z}_{11} & \bar{z}_{12} \\ \bar{z}_{21} & \bar{z}_{22} \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{\bar{z}_{11} \cdot \bar{z}_{22} - \bar{z}_{12}^2} \cdot \begin{vmatrix} \bar{z}_{22} & -\bar{z}_{12} \\ -\bar{z}_{21} & \bar{z}_{11} \end{vmatrix}$$

da cui segue immediatamente:

$$\bar{y}'_{11} = \frac{\bar{z}_{22}}{\bar{z}_{11} \cdot \bar{z}_{22} - \bar{z}_{12}^2} \quad \bar{y}'_{12} = \bar{y}'_{21} = \frac{-\bar{z}_{12}}{\bar{z}_{11} \cdot \bar{z}_{22} - \bar{z}_{12}^2} \quad \bar{y}'_{22} = \frac{\bar{z}_{11}}{\bar{z}_{11} \cdot \bar{z}_{22} - \bar{z}_{12}^2}$$

Ricordando che:

$$\begin{aligned} \bar{y}'_{11} &= \bar{Y}_{12} + \bar{Y}_{31} & \bar{y}'_{12} &= -\bar{Y}_{31} \\ \bar{y}'_{21} &= -\bar{Y}_{31} & \bar{y}'_{22} &= \bar{Y}_{23} + \bar{Y}_{31} \end{aligned}$$

si ottengono le Ammettenze cercate:

$$\bar{Y}_{12} = \frac{\bar{z}_{22} - \bar{z}_{12}}{\bar{z}_{11} \cdot \bar{z}_{22} - \bar{z}_{12}^2} \quad \bar{Y}_{23} = \frac{\bar{z}_{11} - \bar{z}_{12}}{\bar{z}_{11} \cdot \bar{z}_{22} - \bar{z}_{12}^2} \quad \bar{Y}_{31} = \frac{\bar{z}_{12}}{\bar{z}_{11} \cdot \bar{z}_{22} - \bar{z}_{12}^2}$$

dalle quali si ricavano le corrispettive Impedenze:

$$\bar{Z}_{12} = \frac{\bar{z}_{11} \cdot \bar{z}_{22} - \bar{z}_{12}^2}{\bar{z}_{22} - \bar{z}_{12}} \quad \bar{Z}_{23} = \frac{\bar{z}_{11} \cdot \bar{z}_{22} - \bar{z}_{12}^2}{\bar{z}_{11} - \bar{z}_{12}} \quad \bar{Z}_{31} = \frac{\bar{z}_{11} \cdot \bar{z}_{22} - \bar{z}_{12}^2}{\bar{z}_{12}}$$

Considerando che il circuito di partenza era costituito da un carico trifase collegato a Stella, è interessante calcolare le Impedenze equivalenti a Stella:

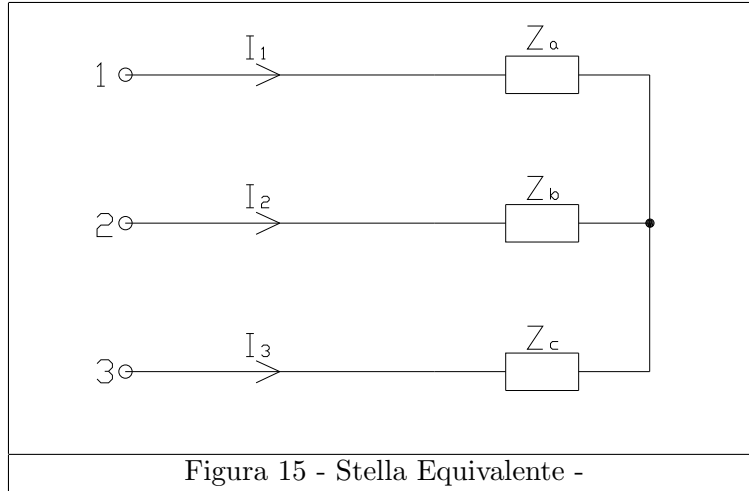


Figura 15 - Stella Equivalente -

dalle note relazioni Triangolo \longrightarrow Stella, si ha

$$\bar{Z}_a = \frac{\bar{Z}_{12} \cdot \bar{Z}_{31}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}} \quad \bar{Z}_b = \frac{\bar{Z}_{12} \cdot \bar{Z}_{23}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}} \quad \bar{Z}_c = \frac{\bar{Z}_{23} \cdot \bar{Z}_{31}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}}$$

Riepilogando i risultati

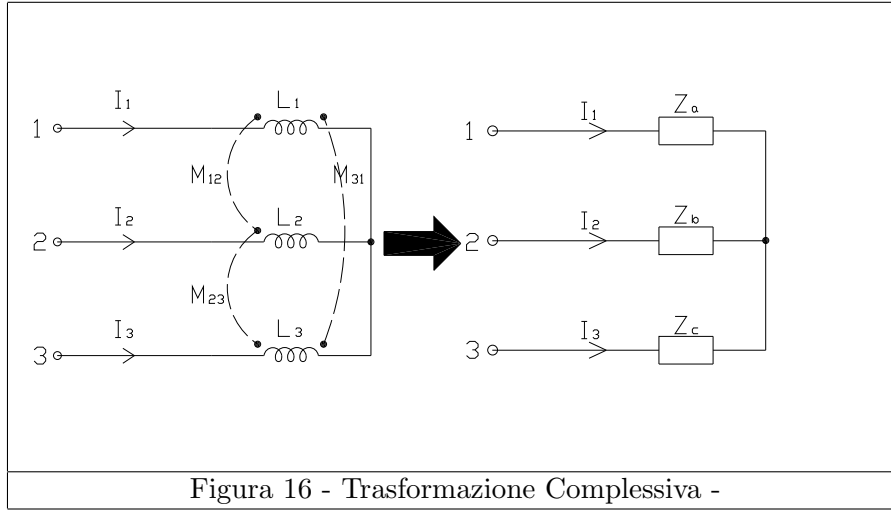


Figura 16 - Trasformazione Complessiva -

$$\bar{Z}_a = \frac{\bar{Z}_{12} \cdot \bar{Z}_{31}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}} \quad \bar{Z}_b = \frac{\bar{Z}_{12} \cdot \bar{Z}_{23}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}} \quad \bar{Z}_c = \frac{\bar{Z}_{23} \cdot \bar{Z}_{31}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}}$$

$$\bar{Z}_{12} = \frac{\bar{z}_{11} \cdot \bar{z}_{22} - \bar{z}_{12}^2}{\bar{z}_{22} - \bar{z}_{12}} \quad \bar{Z}_{23} = \frac{\bar{z}_{11} \cdot \bar{z}_{22} - \bar{z}_{12}^2}{\bar{z}_{11} - \bar{z}_{12}} \quad \bar{Z}_{31} = \frac{\bar{z}_{11} \cdot \bar{z}_{22} - \bar{z}_{12}^2}{\bar{z}_{12}}$$

$$\begin{aligned} \bar{z}_{11} &= j(X_1 + X_2 - 2X_{12}) & \bar{z}_{12} &= j(X_2 + X_{31} - X_{12} - X_{23}) \\ \bar{z}_{21} &= \bar{z}_{12} = j(X_2 + X_{31} - X_{12} - X_{23}) & \bar{z}_{22} &= j(X_2 + X_3 - 2X_{23}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 &= \omega L_1 & X_2 &= \omega L_2 & X_3 &= \omega L_3 \\ X_{12} &= \omega M_{12} & X_{23} &= \omega M_{23} & X_{31} &= \omega M_{31} \end{aligned}$$

Verifica

Per verificare la correttezza dei risultati fin qui ottenuti, si analizza il caso in cui:

$$X_1 = X_2 = X_3 = X_L \quad X_{12} = X_{23} = X_{31} = X_M$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \bar{z}_{11} &= j2(X_L - X_M) & \bar{z}_{12} &= j(X_L - X_M) \\ \bar{z}_{21} &= \bar{z}_{12} = j(X_L - X_M) & \bar{z}_{22} &= \bar{z}_{11} = j2(X_L - X_M) \end{aligned}$$

$$\bar{Y}_{12} = \frac{j2(X_L - X_M) - j(X_L - X_M)}{(X_L - X_M)^2 - 4(X_L - X_M)^2} = -j \frac{1}{3(X_L - X_M)} = \bar{Y}_{23} = \bar{Y}_{31}$$

da cui:

$$\bar{Z}_{12} = \frac{1}{\bar{Y}_{12}} = j3(X_L - X_M) = \bar{Z}_{23} = \bar{Z}_{31}$$

$$\bar{Z}_a = \bar{Z}_b = \bar{Z}_c = \frac{[j3(X_L - X_M)]^2}{j9(X_L - X_M)} = j(X_L - X_M) \quad \text{C.V.D.}$$

1.8 Mutue Induttanze con B2 Spice

Il simulatore B2 Spice è in grado di lavorare con sole due mutue induttanze, come indicato nella figura seguente:

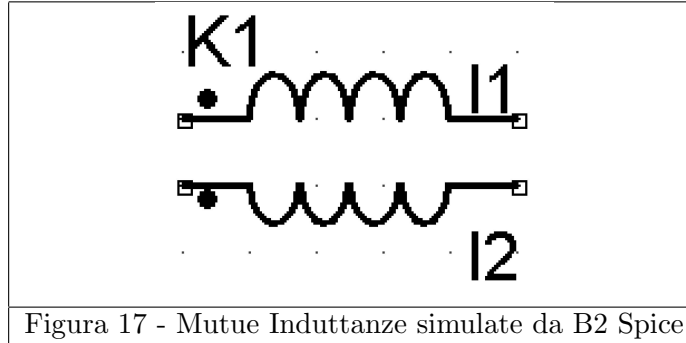


Figura 17 - Mutue Induttanze simulate da B2 Spice

Vedremo come è possibile simulare il circuito seguente, utilizzando la suddetta tipologia di accoppiamento.

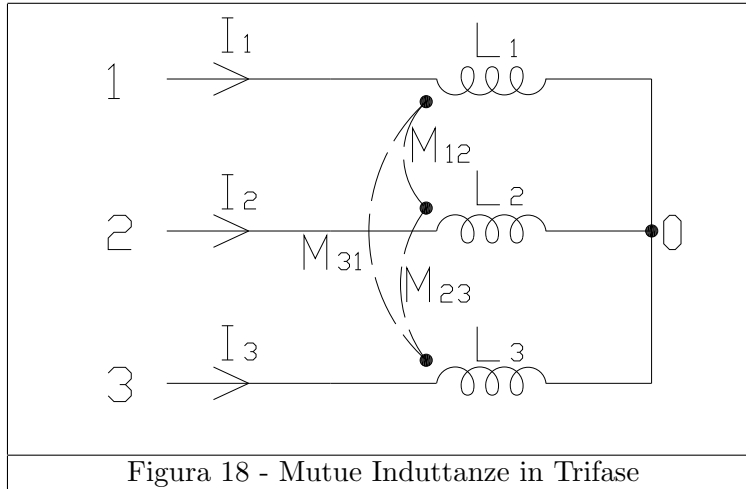


Figura 18 - Mutue Induttanze in Trifase

Osserviamo il seguente schema:

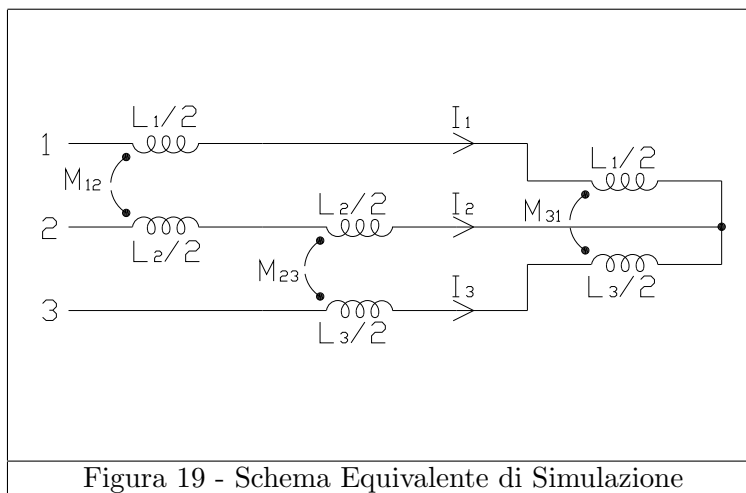


Figura 19 - Schema Equivalente di Simulazione

Affinchè sussista l'equivalenza bisogna imporre che i fattori d'accoppiamento delle mutue induttanze in B2-Spice siano il doppio dei corrispettivi valori del circuito reale da simulare; ovvero, per esempio, se indichiamo con k_{12} il fattore d'accoppiamento della mutua 12 del circuito reale, e con k'_{12} la corrispettiva del circuito in B2-Spice, deve essere:

$$k'_{12} = 2 \cdot k_{12}$$

Così facendo, si impone che i corrispondenti coefficienti di mutua induzione (M) restino uguali in entrambi i circuiti.