

**ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA**  
**INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)**  
**PROVA SCRITTA DEL 12 GENNAIO 1999**  
**Tempo assegnato: 2 ore e 30 minuti**

**PRIMO ESERCIZIO [8 punti]**

1. Calcolare la cardinalità di ognuno dei seguenti sottoinsiemi di  $\mathbf{N}^2$  (in  $\mathbf{N}$  non è compreso lo zero):

$$A = \{(m, n) \mid m^2 + n^2 < 9\},$$

$$B = \{(m, n) \mid m^2 + n^2 = 9\},$$

$$A = \{(m, n) \mid m^2 + n^2 > 9\}.$$

2. Nel caso in cui uno di tali insiemi sia numerabile, determinarne una corrispondenza biunivoca con  $\mathbf{N}$ .

**SECONDO ESERCIZIO [8 punti]**

1. Dimostrare che l'insieme:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{R} - \{0\}, b \in \mathbf{R}, c \in \mathbf{R} - \{0\} \right\}$$

con l'operazione  $\cdot$  di moltiplicazione righe per colonne è un gruppo.

2. Verificare quali dei seguenti sottoinsiemi di  $G$  sono sottogruppi di  $(G, \cdot)$ :

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbf{R} \right\},$$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{R} - \{0\}, b \in \mathbf{R} \right\},$$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{R} - \{0\}, b \in \mathbf{R} \right\}.$$

**TERZO ESERCIZIO [7 punti]**

Si consideri lo spazio vettoriale  $M(2, \mathbf{R})$ .

1. Verificare che la funzione  $f$  che associa ad ogni matrice la sua trasposta è un endomorfismo di  $M(2, \mathbf{R})$ .
2. Determinare la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica di  $M(2, \mathbf{R})$ .
3. Determinare la matrice associata a  $f$  rispetto alla base:

$$\left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

**QUARTO ESERCIZIO [7 punti]**

Si consideri la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 6 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Determinare una matrice  $M \in \text{GL}(3, \mathbf{R})$  e una matrice di Jordan  $A'$  tali che si abbia  $A' = M^{-1}AM$ .
2. Determinare, qualora esistano, le matrici  $\sqrt{A}$  e  $\ln A$ .

**ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA**  
**INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)**  
**RISOLUZIONE DEL TEMA D'ESAME DEL 12 GENNAIO 1999**

**PRIMO ESERCIZIO**

1. Osserviamo che  $\mathbf{N}^2$  è l'unione disgiunta di  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Se  $(m, n)$  è un elemento di  $\mathbf{N}^2$  tale che  $m \geq 3$  o  $n \geq 3$ , allora  $m^2 + n^2 \geq 9 + 1$  e, pertanto,  $(m, n) \in C$ : dunque  $C$  è un insieme infinito (contiene ad esempio gli infiniti elementi del tipo  $(3, n)$  con  $n \in \mathbf{N}$ ). Se, invece,  $(m, n)$  è una coppia tale che  $m \leq 2$ ,  $n \leq 2$  allora  $m^2 + n^2 \leq 4 + 4 = 8$ , e, dunque,  $(m, n) \in A$ . Riassumendo si ha  $A = \{(m, n) \mid m \leq 2, n \leq 2\}$ ,  $B = \emptyset$ ,  $C = \{(m, n) \mid m \geq 3 \text{ o } n \geq 3\}$ . Dunque  $|A| = 4$ ,  $|B| = 0$ ,  $|C| = \aleph_0$  (infatti  $C$  è un sottoinsieme infinito di  $\mathbf{N}^2$  che ha cardinalità  $\aleph_0$ ).
2. Sia  $f$  la corrispondenza biunivoca tra  $\mathbf{N}^2$  e  $\mathbf{N}$  definita da

$$f(m, n) = \frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2} + m$$

(tale corrispondenza si può facilmente ottenere con il procedimento diagonale di Cantor). Possiamo facilmente ottenere da questa enumerazione di  $\mathbf{N}^2$  un'enumerazione di  $C$  semplicemente "saltando" gli elementi di  $A$ . Ciò può essere meglio inteso considerando lo schema seguente:

1	2	3	4	5	6	7	8	...
(1, 1)	(1, 2)	(2, 2)	(1, 3)	(2, 2)	(3, 1)	(1, 4)	(2, 3)	...
×	×	×	1	×	2	3	4	...

Dunque  $g : C \rightarrow \mathbf{N}$  è

$$g(m, n) = \begin{cases} 1 & \text{se } (m, n) = (1, 3) \\ \frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2} + m - 4 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

**SECONDO ESERCIZIO**

1. Per dimostrare che  $G$  è un gruppo occorre verificare le seguenti proprietà:
- (a)  $G \neq \emptyset$ : banale.
  - (b)  $G$  è chiuso rispetto al prodotto: se  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}$  sono due matrici di  $G$  allora  $AB = \begin{pmatrix} ad & ae + bf \\ 0 & cf \end{pmatrix}$ . Poiché  $a, c, d$  e  $f$  sono non nulli, allora  $ad$  e  $cf$  sono non nulli e  $AB \in G$ .
  - (c) Il prodotto è associativo: questo è banale, perché il prodotto tra matrici è sempre associativo.
  - (d) Esiste un elemento neutro per il prodotto: la matrice identica appartiene a  $G$ .

- (e) Esiste un inverso in  $G$  per ogni elemento  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$  di  $G$ : basta considerare la matrice  $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$ .

*Si noti che un sottoinsieme di  $M(2, \mathbf{R})$  può essere un gruppo rispetto al prodotto senza contenere la matrice identica. Si consideri ad esempio il sottoinsieme  $W$  di  $M(2, \mathbf{R})$  formato dalle matrici del tipo  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  con  $a \neq 0$ : si verifica facilmente che  $W$  è un gruppo rispetto al prodotto riga per colonna, il cui elemento neutro è la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .*

2. Verifichiamo ora se  $H$  è un sottogruppo di  $G$ : per far ciò occorre verificare le tre proprietà.

- (a)  $H \neq \emptyset$ : infatti  $H$  contiene matrice identica.
- (b)  $H$  è chiuso rispetto al prodotto: se  $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  allora si ha  $AB = \begin{pmatrix} 1 & e+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ .
- (c) L'inversa di ogni matrice di  $H$  appartiene ancora a  $H$ : se  $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  allora  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ .

Dunque  $H$  è un sottogruppo di  $G$ .

Ripetiamo lo stesso procedimento per  $K$ :

- (a)  $K \neq \emptyset$ : ad esempio  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in K$ .
- (b)  $K$  è chiuso rispetto al prodotto: se  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & -d \end{pmatrix}$  allora si ha  $AB = \begin{pmatrix} ad & ae - bd \\ 0 & ad \end{pmatrix} \notin K$ .

Dunque  $K$  non è un sottogruppo di  $G$ .

Consideriamo infine  $L$ .

- (a)  $L \neq \emptyset$ : infatti  $L$  contiene la matrice identica.
- (b)  $L$  è chiuso rispetto al prodotto: se  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix}$  allora si ha  $AB = \begin{pmatrix} ad & ae + \frac{b}{ad} \\ 0 & \frac{1}{ad} \end{pmatrix} \in L$ .
- (c) L'inversa di ogni matrice di  $L$  appartiene ancora a  $L$ : se  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$  allora  $A^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in L$ .

Dunque  $L$  è un sottogruppo di  $G$ .

### TERZO ESERCIZIO

1. L'applicazione  $f$  è ovviamente un endomorfismo di spazio vettoriale: infatti  $f(A+B) = {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = f(A) + f(B)$  per ogni  $A, B \in M(2, \mathbf{R})$  e  $f(kA) = {}^t(kA) = k{}^tA = kf(A)$  per ogni  $A \in M(2, \mathbf{R})$ ,  $k \in \mathbf{R}$ .
2. Ricordiamo che la base canonica di  $M(2, \mathbf{R})$  è quella formata dalle matrici

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ora  $f(E_1) = E_1$ ,  $f(E_2) = E_3$ ,  $f(E_3) = E_2$  e  $f(E_4) = E_4$ : dunque la matrice di  $f$  rispetto alla base canonica è:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Per ottenere la matrice di  $f$  rispetto alla base  $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$  possiamo seguire due procedimenti:

La matrice di passaggio dalla base canonica alla base  $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$  è:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque la matrice rappresentativa di  $f$  rispetto alla base  $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$  è  $R^{-1}MR$ .

Alternativamente esprimiamo le immagini delle matrici  $A_1, A_2, A_3, A_4$  come combinazioni lineari delle matrici medesime: si ottiene  $f(A_1) = A_1$ ,  $f(A_2) = A_2$ ,  $f(A_3) = A_3$ ,  $f(A_4) = 2A_1 - A_4$ . Dunque la matrice rappresentativa di  $f$  rispetto alla base  $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$  è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

### QUARTO ESERCIZIO

1. Calcoliamo il polinomio caratteristico di  $A$ :

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda = -\lambda(\lambda - 2)^2.$$

Dunque il polinomio caratteristico di  $A$  è totalmente riducibile e, pertanto,  $A$  è Jordanizzabile. Gli autovalori di  $A$  sono  $\lambda_1 = 0$  di molteplicità algebrica 1 e  $\lambda_2 = 2$  di molteplicità algebrica 2. La molteplicità algebrica di un autovalore di una matrice Jordanizzabile è uguale alla somma delle dimensioni di tutti i blocchi di Jordan relativi a tale autovalore che compaiono nella forma canonica di Jordan della matrice. Pertanto una matrice di Jordan simile alla matrice  $A$  conterrà un blocco di Jordan di dimensione 1 relativo all'autovalore 0 e blocchi di Jordan di dimensione complessiva 2 relativi all'autovalore 2. Determiniamo ora un autovettore  $\mathbf{v}_1$  di  $A$  relativo all'autovalore 0. Se  $\mathbf{v}_1 = (x, y, z)$  deve essere  $A^t \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$  ovvero

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -2x + 6y + 6z = 0 \\ -x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

che, risolto, dà  $x = -\frac{3}{5}z$ ,  $y = -\frac{6}{5}z$ . Possiamo ad esempio porre  $\mathbf{v}_1 = (3, 6, -5)$ .

Consideriamo ora l'altro autovalore  $\lambda_2 = 2$ : sia  $\theta$  l'endomorfismo di  $\mathbf{R}^3$  la cui matrice rispetto alla base canonica  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  di  $\mathbf{R}^3$  sia  $A$ , e sia  $\theta_2 = \theta - 2I$ . Determiniamo le immagini dei vettori della base canonica tramite le potenze successive di  $\theta_2$  (dobbiamo proseguire fino a che troviamo una potenza  $\theta_2^i$  tale che  $\dim \ker \theta_2^i = \text{ma}(2) = 2$ , ovvero  $\dim \text{Im } \theta_2^i = 1$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &\rightarrow -\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 &\rightarrow -6\mathbf{e}_1 - 12\mathbf{e}_2 + 10\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 &\rightarrow 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 &\rightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_3 &\rightarrow 3\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3 &\rightarrow -6\mathbf{e}_1 - 12\mathbf{e}_2 + 10\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Si nota facilmente che  $\dim \text{Im } \theta_2 = 2$  e  $\dim \text{Im } \theta_2^2 = 1$  e dunque  $\dim \ker \theta_2 = 1$  e  $\dim \ker \theta_2^2 = 2$ . Poiché  $\dim \ker \theta_2 = 1$  avremo un solo blocco di Jordan relativo all'autovalore 2, e tale blocco avrà dimensione 2. Consideriamo allora la seguente successione dei nuclei (sulla prima riga della tabella abbiamo riportato le loro dimensioni) e le seguenti catene di autovettori generalizzati:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & < & 1 & < & 2 \\ \{\mathbf{0}\} & \subset & \ker \theta_2 & \subset & \ker \theta_2^2 \\ \mathbf{0} & \leftarrow & \mathbf{v}_2 & \leftarrow & \mathbf{v}_3 \end{array}$$

Occorre allora scegliere  $\mathbf{v}_3$  in  $\ker \theta_2^2 - \ker \theta_2$ : ad esempio scegliamo  $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_2$ . Determiniamo così  $\mathbf{v}_2 = \theta_2(\mathbf{v}_3) = 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$ . Consideriamo ora la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono, rispettivamente, le componenti dei vettori  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$  rispetto alla base canonica. Risulta allora  $M^{-1}AM = J$ , dove

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Osserviamo che l'autovalore 0 ha indice 1 e l'autovalore 2 ha indice 2 (ricordiamo che l'indice di un autovalore coincide con la massima dimensione dei blocchi di Jordan relativi a quell'autovalore presenti nella forma canonica). Ora, è possibile definire  $\phi(A)$ , dove  $\phi$  è una funzione reale di variabile reale, se e solo se  $\phi$  è definita sullo spettro di  $A$ , ovvero se sono definiti i valori  $\phi(0)$ ,  $\phi(2)$ ,  $\phi'(2)$ . Verifichiamo queste condizioni per le funzioni  $f$  dove  $f(x) = \sqrt{x}$  e  $\ln$ . Si ha che  $f(0) = \sqrt{0} = 0$ ,  $f(2) = \sqrt{2}$ , e la derivata prima di  $f$  valutata in  $x$  è  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , che in 2 è definita e assume il valore  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ : dunque  $f$  è definita sullo spettro di  $A$ . Per quanto riguarda  $\ln$  osserviamo che  $\ln$  non è definita in 0, e, pertanto,  $\ln A$  non è definita.. Per calcolare  $A^{\frac{1}{2}}$  possiamo seguire due strade:

- Calcoliamo  $J^{\frac{1}{2}}$ : questa si ottiene nel modo seguente

$$J^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} f(0) & 0 & 0 \\ 0 & f(2) & f'(2) \\ 0 & 0 & f(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ora  $A^{\frac{1}{2}} = MJ^{\frac{1}{2}}M^{-1}$ .

- Alternativamente osserviamo che il polinomio minimo di  $A$  (che è  $x(x-2)^2$ ) ha grado 3 e, pertanto, esiste un polinomio  $p(x)$  di grado minore di 3 che coincide con  $f$  sullo spettro di  $A$ , ovvero  $p(0) = f(0)$ ,  $p(2) = f(2)$ ,  $p'(2) = f'(2)$ . Se  $p(x) = a + bx + cx^2$  (e, dunque,  $p'(x) = b + 2cx$ ) ciò significa che:

$$\begin{cases} a & = & 0 \\ a + 2b + 4c & = & \sqrt{2} \\ b + 4c & = & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema troviamo  $a = 0$ ,  $b = \frac{3}{4}\sqrt{2}$ ,  $c = -\frac{1}{8}\sqrt{2}$ . Dunque  $A^{\frac{1}{2}} = p(A)$  ovvero

$$A^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\sqrt{2}A - \frac{1}{8}\sqrt{2}A^2$$

e, sviluppando i calcoli, troviamo:

$$A^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$