

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
PROVA SCRITTA DEL 18 SETTEMBRE 2000
Tempo assegnato: 2 ore e 30 minuti

PRIMO ESERCIZIO [7 punti]

Si determini, al variare del parametro reale k , la cardinalità dell'insieme delle soluzioni del sistema lineare di equazioni nelle incognite reali x, y e z :

$$\begin{cases} x + y + kz = 0 \\ x + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \end{cases}$$

SECONDO ESERCIZIO [8 punti]

Si consideri l'insieme G_n delle matrici quadrate $n \times n$ a coefficienti in \mathbb{Z} con determinante uguale a 1 o a -1 :

$$G_n := \{M \mid M \in M(n, \mathbb{Z}), \det M = \pm 1\}$$

1. Si dimostri che, per ogni intero positivo n , G_n è un gruppo rispetto al prodotto righe per colonne.
2. Si stabilisca se G_3 è un gruppo ciclico e in caso affermativo se ne determini un generatore.

TERZO ESERCIZIO [8 punti]

Si consideri la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Si determini la forma canonica di Jordan J di A e si trovi una matrice invertibile M tale che $J = M^{-1}AM$.
2. Si determinino se sono definite $A^{\frac{3}{2}}$ e $A^{\frac{5}{2}}$ e in caso affermativo le si calcolino.

QUARTO ESERCIZIO [7 punti]

Si discuta e risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in \mathbb{Z}_8 :

$$\begin{cases} x + y + [2]_8 w = [2]_8 \\ [4]_8 x + [5]_8 y + [5]_8 z + [6]_8 w = [4]_8 \\ [3]_8 x + [2]_8 y + [3]_8 z = [2]_8 \end{cases}$$