

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
PROVA SCRITTA DEL 19 LUGLIO 2000
Tempo assegnato: 2 ore e 30 minuti

PRIMO ESERCIZIO [7 punti]

Determinare al variare di k in \mathbb{Z} la cardinalità del sottoinsieme di \mathbb{Z}^2 :

$$A_k := \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq kx^2\}.$$

SECONDO ESERCIZIO [8 punti]

Si consideri il sottoinsieme A dell'anello di matrici $M(3, \mathbb{R})$ formato dalle matrici del tipo:

$$M(a, b, c) := \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

dove a , b e c variano in \mathbb{R} .

1. Si verifichi che A è un sottoanello di $M(3, \mathbb{R})$, stabilendo se A è unitario e se A è commutativo.
2. Si stabilisca se i sottoinsiemi

$$R := \{M(0, b, c) \mid b, c \in \mathbb{R}\}$$

$$S := \{M(a, 0, c) \mid a, c \in \mathbb{R}\}$$

$$T := \{M(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

sono sottoanelli di A .

TERZO ESERCIZIO [8 punti]

Si consideri la matrice a coefficienti reali:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Si determini la forma canonica di Jordan J di A e si trovi una matrice invertibile M tale che $J = M^{-1}AM$.
2. Si calcoli $\log A$ e si determinino tutti i polinomi $f(x)$ tali che $f(A) = \log A$.

QUARTO ESERCIZIO [7 punti]

Si considerino le matrici di $GL(2, \mathbb{Z}_2)$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} [0]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [1]_2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} [1]_2 & [0]_2 \\ [1]_2 & [1]_2 \end{pmatrix},$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [0]_2 & [1]_2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [0]_2 \end{pmatrix}.$$

1. Si stabilisca per quali i esiste un omomorfismo di gruppi $f_i : (\mathbb{Z}_4, +) \rightarrow GL(2, \mathbb{Z}_2)$ tale che $f([1]_4) = A_i$.
2. Per ciascuno degli omomorfismi trovati al punto precedente si determini nucleo e immagine.

N. B.: si ricorda che $GL(2, \mathbb{Z}_2)$ indica il gruppo rispetto al prodotto righe per colonne delle matrici invertibili di dimensione 2 a coefficienti in \mathbb{Z}_2 .