

**ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA**  
**INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)**  
**PROVA SCRITTA DEL 19 LUGLIO 2000**  
**Tempo assegnato: 2 ore e 30 minuti**

**PRIMO ESERCIZIO [7 punti]**

Determinare al variare di  $k$  in  $\mathbb{Z}$  la cardinalità del sottoinsieme di  $\mathbb{Z}^2$ :

$$A_k := \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq kx^2\}.$$

**SECONDO ESERCIZIO [8 punti]**

Si consideri il sottoinsieme  $A$  dell'anello di matrici  $M(3, \mathbb{R})$  formato dalle matrici del tipo:

$$M(a, b, c) := \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

dove  $a$ ,  $b$  e  $c$  variano in  $\mathbb{R}$ .

1. Si verifichi che  $A$  è un sottoanello di  $M(3, \mathbb{R})$ , stabilendo se  $A$  è unitario e se  $A$  è commutativo.
2. Si stabilisca se i sottoinsiemi

$$R := \{M(0, b, c) \mid b, c \in \mathbb{R}\}$$

$$S := \{M(a, 0, c) \mid a, c \in \mathbb{R}\}$$

$$T := \{M(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

sono sottoanelli di  $A$ .

**TERZO ESERCIZIO [8 punti]**

Si consideri la matrice a coefficienti reali:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Si determini la forma canonica di Jordan  $J$  di  $A$  e si trovi una matrice invertibile  $M$  tale che  $J = M^{-1}AM$ .
2. Si calcoli  $\log A$  e si determinino tutti i polinomi  $f(x)$  tali che  $f(A) = \log A$ .

**QUARTO ESERCIZIO [7 punti]**

Si considerino le matrici di  $\text{GL}(2, \mathbb{Z}_2)$ :

$$A_1 = \begin{pmatrix} [0]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [1]_2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} [1]_2 & [0]_2 \\ [1]_2 & [1]_2 \end{pmatrix},$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [0]_2 & [1]_2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [0]_2 \end{pmatrix}.$$

1. Si stabilisca per quali  $i$  esiste un omomorfismo di gruppi  $f_i : (\mathbb{Z}_4, +) \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{Z}_2)$  tale che  $f([1]_6) = A_i$ .
2. Per ciascuno degli omomorfismi trovati al punto precedente si determini nucleo e immagine.

N. B.: si ricorda che  $\text{GL}(2, \mathbb{Z}_2)$  indica il gruppo rispetto al prodotto righe per colonne delle matrici invertibili di dimensione 2 a coefficienti in  $\mathbb{Z}_2$ .