

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
PROVA SCRITTA DEL 1° GIUGNO 1998
Tempo assegnato: 2 ore e 30 minuti

PRIMO ESERCIZIO [8 punti]

Sia A il sottoinsieme dell'anello $(M(2, \mathbf{R}), +, \cdot)$ (dove $+$ indica la somma di matrici e \cdot indica il prodotto di matrici riga per colonna) formato dalle matrici del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbf{R}$:

1. Mostrare che A è un sottoanello di $M(2, 2, \mathbf{R})$.
2. Mostrare che la funzione $f : \mathbf{C} \rightarrow A$ così definita $f(a + ib) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ è un isomorfismo di anelli.
3. Dimostrare che A è un campo (Suggerimento: utilizzare il punto 2)

SECONDO ESERCIZIO [7 punti]

Si determini al variare del parametro m in \mathbf{Z} , la cardinalità dell'insieme

$$A_m = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}, y = mx, xy \leq 1\}.$$

TERZO ESERCIZIO [8 punti]

Siano date le matrici A e B di $M(4, \mathbf{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Stabilire se le matrici A e B sono simili: in caso affermativo determinare una matrice $M \in \text{GL}(4, \mathbf{R})$ tale che $A = M^{-1}BM$
2. Calcolare A^{100} e B^{100} .

QUARTO ESERCIZIO [7 punti]

Il quarto esercizio riguarda argomenti non facenti parte del programma dell'anno accademico 1999-2000.

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
RISOLUZIONE DEL TEMA D'ESAME DEL 1° GIUGNO 1998

PRIMO ESERCIZIO

1. Per verificare che A è un sottoanello di $(M(2, \mathbf{R}), +, \cdot)$ occorre e basta verificare che $A \neq \emptyset$, e che per ogni M e $N \in A$ le matrici $M + N$, $-M$ e MN appartengono ancora ad A . L'insieme A è evidentemente non vuoto, perché possiamo assegnare ai parametri a e b dei valori reali arbitrari e ottenere una matrice di A . Siano ora

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$$

due matrici qualunque di A . Dunque:

$$\begin{aligned} M + N &= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -b-d & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix}, \\ -M &= \begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -(-b) & -a \end{pmatrix}, \\ MN &= \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & -bd+ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sono evidentemente matrici di A .

2. Per verificare che f è un isomorfismo occorre e basta verificare che f conserva le operazioni e che f è sia iniettivo sia suriettivo.

(a) Se $a + ib$ e $c + id$ sono due numeri complessi allora,

$$fa(+ib + c + id) = f(a + c + i(b + d)) = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} f(a + ib) + f(c + id) &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e, pertanto f conserva la somma. Inoltre

$$f((a + ib)(c + id)) = f(ac - bd + i(ad + bc)) = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -bc - ad & ac - bd \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} f(a + ib) \cdot f(c + id) &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -bc - ad & ac - bd \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dunque f è un omomorfismo.

(b) f è iniettivo. Se $f(a+ib) = 0$, allora $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, e, pertanto, $a = b = 0$, cioè $a + ib = 0$.

(c) f è suriettivo. Se $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ è una matrice di A , allora $A = f(a + ib)$.

3. Per verificare che A è un campo è sufficiente notare che abbiamo verificato che A è isomorfo a \mathbf{C} . Poiché quest'ultimo è un campo anche A lo è.

SECONDO ESERCIZIO

Si noti anzitutto che il sistema

$$\begin{cases} y & = & mx \\ xy & \leq & 1 \end{cases}$$

è ovviamente equivalente al seguente

$$\begin{cases} y & = & mx \\ mx^2 & \leq & 1 \end{cases}$$

Dunque, se indichiamo con B_m il sottoinsieme $\{x \mid mx^2 \leq 1\}$ di \mathbf{Z} , l'applicazione $\alpha : B_m \rightarrow A_m$ definita da $\alpha(x) = (x, mx)$ è biunivoca e, quindi, $|A_m| = |B_m|$. Per $m \leq 0$, la disequazione $mx^2 \leq 1$ è soddisfatta per tutti i valori $x \in \mathbf{Z}$. Dunque $|A_m| = \aleph_0$.

Per $m = 1$ la disequazione diventa $x^2 \leq 1$ che ha come soluzioni i valori 0, 1 e -1. Dunque $|A_1| = 3$.

Per $m > 1$ la disequazione $mx^2 \leq 1$ ha come unica soluzione $x = 0$ (se $x \neq 0$, allora $x^2 \geq 1$ e $mx^2 > 1$). Dunque $|A_m| = 1$.

L'esercizio poteva essere risolto anche geometricamente, considerando A_m come l'insieme dei punti a coordinate intere del piano giacenti sulla retta di equazione $y = mx$ e compresi tra i due rami dell'iperbole di equazione $xy = 1$.

TERZO ESERCIZIO

1. Due matrici quadrate reali sono simili se e solo se, a meno di scambi di blocchi, hanno la stessa forma canonica di Jordan (eventualmente a coefficienti complessi).

Osserviamo che A è una matrice triangolare (superiore): i suoi autovalori sono gli elementi lungo la diagonale contati con le opportune molteplicità. Dunque gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ di molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 1$ di molteplicità algebrica 2.

Determiniamo ora la forma canonica di Jordan di A . Sappiamo che la molteplicità geometrica di un autovalore di una matrice è uguale al numero di blocchi di Jordan relativi all'autovalore presenti nella forma canonica della matrice. Ora:

$$\text{mg}_A(0) = 4 - \text{car } A = 4 - \text{car} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

e

$$\text{mg}_A(1) = 4 - \text{car}(A - I) = 4 - \text{car} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Dunque la forma canonica di Jordan di A è composta un blocco di Jordan relativo all'autovalore 0 avente dimensione 2 (cioè uguale alla molteplicità algebrica di 0) e da due blocchi di Jordan relativi all'autovalore 1 aventi ciascuno dimensione 1 (cioè dimensione complessiva uguale alla molteplicità algebrica di 1). Dunque, a meno di scambi di blocchi, la forma di Jordan di A è la seguente

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se consideriamo ora la matrice B , vediamo che essa è una matrice triangolare inferiore. Analogamente a quanto visto per A si ha che B ha i due autovalori $\lambda_1 = 0$ di molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 1$ di molteplicità algebrica 2. Inoltre si trova facilmente che $\text{mg}_B(0) = 1$ e $\text{mg}_B(1) = 2$. Pertanto la forma canonica di Jordan di B è, a meno di scambi di blocchi, la stessa di A . Dunque A e B sono simili.

Determiniamo ora una matrice invertibile R tale che $R^{-1}AR = J$. Per far ciò consideriamo l'endomorfismo η di \mathbf{R}^4 la cui matrice rispetto alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ di \mathbf{R}^4 sia A . Determiniamo le immagini dei vettori della base canonica tramite η e η^2 (dobbiamo calcolare le potenze di η fino al grado uguale all'indice dell'autovalore 0):

$$\begin{array}{lclcl} \mathbf{e}_1 & \rightarrow & \mathbf{e}_1 & \rightarrow & \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 & \rightarrow & 2\mathbf{e}_1 & \rightarrow & 2\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_3 & \rightarrow & \mathbf{e}_2 & \rightarrow & 2\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_4 & \rightarrow & \mathbf{e}_4 & \rightarrow & \mathbf{e}_4 \end{array}$$

Consideriamo allora la seguente successione dei nuclei (sulla prima riga della tabella abbiamo riportato le loro dimensioni) e la seguente catena di autovettori generalizzati:

$$\begin{array}{cccc} 0 & < & 1 & < & 2 \\ \{\mathbf{0}\} & \subset & \ker \eta & \subset & \ker \eta^2 \\ \mathbf{0} & \leftarrow & \mathbf{v}_1 & \leftarrow & \mathbf{v}_2 \end{array}$$

Occorre allora scegliere \mathbf{v}_2 in $\ker \eta^2 - \ker \eta$: ad esempio scegliamo $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$. Determiniamo così $\mathbf{v}_1 = \eta(\mathbf{v}_2) = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. Sia ora $\eta_1 = \eta - I$. Determiniamo le immagini dei vettori della base canonica tramite η_1 (dobbiamo calcolare le potenze di η_1 fino al grado uguale all'indice dell'autovalore 1):

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{e}_1 & \rightarrow & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 & \rightarrow & 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 & \rightarrow & \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_4 & \rightarrow & \mathbf{0} \end{array}$$

Allora vediamo subito che \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_4 formano una base di $\ker \eta_1$. Poniamo allora $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{v}_4 = \mathbf{e}_4$. Consideriamo ora la matrice

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono, rispettivamente, le componenti dei vettori \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 e \mathbf{v}_4 rispetto alla base canonica. Risulta allora $R^{-1}AR = J$.

Analogamente determiniamo una matrice invertibile S tale che $S^{-1}BS = J$. Consideriamo allora l'endomorfismo θ di \mathbf{R}^4 la cui matrice rispetto alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ di \mathbf{R}^4 sia B . Determiniamo le immagini dei vettori della base canonica tramite θ e θ^2 (dobbiamo calcolare le potenze di θ fino al grado uguale all'indice dell'autovalore 0):

$$\begin{array}{lclcl} \mathbf{e}_1 & \rightarrow & \mathbf{e}_1 & \rightarrow & \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 & \rightarrow & \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 & \rightarrow & \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}_3 & \rightarrow & \mathbf{e}_4 & \rightarrow & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_4 & \rightarrow & \mathbf{0} & & \end{array}$$

Consideriamo allora la seguente successione dei nuclei (sulla prima riga della tabella abbiamo riportato le loro dimensioni) e la seguente catena di autovettori generalizzati:

$$\begin{array}{cccc} 0 & < & 1 & < & 2 \\ \{\mathbf{0}\} & \subset & \ker \theta & \subset & \ker \theta^2 \\ \mathbf{0} & \leftarrow & \mathbf{u}_1 & \leftarrow & \mathbf{u}_2 \end{array}$$

Occorre allora scegliere \mathbf{u}_2 in $\ker \theta^2 - \ker \theta$: ad esempio scegliamo $\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_3$. Determiniamo così $\mathbf{u}_1 = \theta(\mathbf{u}_2) = \mathbf{e}_4$. Sia ora $\theta_1 = \theta - I$. Determiniamo le immagini dei vettori della base canonica tramite θ_1 (dobbiamo calcolare le potenze di θ_1 fino al grado uguale all'indice dell'autovalore 1):

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{e}_1 & \rightarrow & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 & \rightarrow & \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 & \rightarrow & -\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}_4 & \rightarrow & -\mathbf{e}_4 \end{array}$$

Allora vediamo subito che \mathbf{e}_1 e $\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$ formano una base di $\ker \theta_1$. Poniamo allora $\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{u}_4 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$. Consideriamo ora la matrice:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono, rispettivamente, le componenti dei vettori \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_3 e \mathbf{u}_4 rispetto alla base canonica. Risulta allora $S^{-1}BS = J$.

Ma allora se $S^{-1}BS = R^{-1}AR$, si ha che

$$B = SR^{-1}ARS^{-1} = (RS^{-1})^{-1}A(RS^{-1})$$

Dunque una matrice M come quella cercata è, ad esempio, RS^{-1} .

2. Osserviamo innanzitutto che il polinomio minimo tanto di A quanto di B è $x^2(x-1)$ e, pertanto, esiste un polinomio $p(x)$ di grado minore di 3 che coincide con il polinomio $f(x) = x^{100}$ sullo spettro di A e B , ovvero tale che $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$ e $p(1) = f(1)$. Allora $p(A) = A^{100}$ e $p(B) = B^{100}$. Se $p(x) = a + bx + cx^2$, si ha che $p'(x) = b + 2cx$. Inoltre $f'(x) = 100x^{99}$. Imponendo le condizioni $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$ e $p(1) = f(1)$ troviamo il sistema:

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 0 \\ a + b + c &= 1, \end{aligned}$$

che, risolto, dà $a = b = 0$ e $c = 1$. Ma allora $p(x) = x^2$, ovvero

$$A^{100} = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$B^{100} = B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$