

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
PROVA SCRITTA DEL 23 FEBBRAIO 1998
Tempo assegnato: 2 ore e 30 minuti

PRIMO ESERCIZIO [7 punti]

Determinare la cardinalità dei seguenti sottoinsiemi di \mathbf{Z}^2 .

1. $A = \{(n, m) \mid n^2 + m^2 \leq 1\}$;
2. $B = \{(n, m) \mid n^2 - m^2 \leq 1\}$.

SECONDO ESERCIZIO [8 punti]

Siano dati i gruppi $(\mathbf{Z}_{12}, +)$ e (σ_3, \circ) .

1. Determinare tutti gli omomorfismi da $(\mathbf{Z}_{12}, +)$ a (σ_3, \circ) .
2. Stabilire se esiste un omomorfismo suriettivo da $(\mathbf{Z}_{12}, +)$ a (σ_3, \circ) .
3. Dire se esistono due omomorfismi distinti f e g da $(\mathbf{Z}_{12}, +)$ a (σ_3, \circ) tali che $f(\mathbf{Z}_{12}) = g(\mathbf{Z}_{12})$. In caso affermativo determinare f e g .

TERZO ESERCIZIO [8 punti]

Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare una matrice di Jordan J ed una matrice $M \in GL(6, \mathbf{R})$ tale che $J = M^{-1}AM$.
2. Calcolare, nei casi in cui è possibile, $f(A)$ e $g(A)$, dove $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$ e $g(x) = \sqrt[3]{x-2}$.

QUARTO ESERCIZIO [7 punti]

Il quarto esercizio riguarda argomenti non facenti parte del programma dell'anno accademico 1999-2000.

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
RISOLUZIONE DEL TEMA D'ESAME DEL 23 FEBBRAIO 1998

PRIMO ESERCIZIO

1. Osserviamo innanzitutto che se n e m sono numeri interi, allora n^2 e m^2 sono numeri interi positivi o nulli. Quindi, se $(n, m) \in A$, risulta $0 \leq n^2 + m^2 \leq 1$. Dunque, o $n^2 + m^2 = 0$, nel qual caso necessariamente deve essere $n = 0, m = 0$, oppure $n^2 + m^2 = 1$, il che può verificarsi solo se $n = 0$ e $m = \pm 1$, oppure $n = \pm 1$ e $m = 0$. Pertanto

$$A = \{(0, 0), (1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}.$$

Dunque $|A| = 5$.

2. L'insieme B è un sottoinsieme di \mathbf{Z}^2 : sappiamo bene che la cardinalità di \mathbf{Z} è uguale a quella di \mathbf{N} e che la cardinalità di \mathbf{N}^2 coincide con quella di \mathbf{N} . Dunque $|B| \leq |\mathbf{Z}^2| = |\mathbf{N}|$. D'altra parte la mappa $\phi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}^2$ data da $\phi(n) = (0, n)$ è chiaramente iniettiva e, inoltre, la sua immagine è contenuta in B (infatti $0^2 - n^2 \leq 1$). Ma allora $|B| \geq |\mathbf{N}|$ e, dunque, $|B| = |\mathbf{N}|$. (Si noti che non è necessario determinare esplicitamente una corrispondenza biunivoca tra B e \mathbf{N}).

Per risolvere questo tipo di esercizi può essere di aiuto rappresentare graficamente gli insiemi di cui occorre calcolare la cardinalità. Ad esempio A può essere pensato come l'insieme dei punti del piano cartesiano con coordinate intere contenuti nella circonferenza di raggio unitario, mentre B può essere pensato come l'insieme dei punti del piano cartesiano con coordinate intere compresi tra i due rami di un'iperbole.

SECONDO ESERCIZIO

1. Sappiamo che un omomorfismo ϕ da un gruppo ciclico G di generatore g in un gruppo qualsiasi H è individuato dall'immagine di g . Se, infatti, $\phi(g) = h$ vale la seguente uguaglianza

$$\phi(g^n) = h^n \text{ per ogni } n \in \mathbf{Z}.$$

Viceversa, se il gruppo ciclico G è finito e ha ordine r , e h è un elemento di H , tale posizione definisce effettivamente un omomorfismo ϕ da G in H se e solo se h ha periodo finito e divisore di r . Osserviamo ora che $(\mathbf{Z}_{12}, +)$ è un gruppo ciclico di ordine 12, generato da $[1]_{12}$, e (σ_3, \circ) è un gruppo di ordine 6. Tutti gli elementi di σ_3 hanno periodo che divide $|H| = 6$ e, dunque, anche 12. Pertanto, per ciascun elemento $h \in \sigma_3$ esiste un omomorfismo ϕ_h da $(\mathbf{Z}_{12}, +)$ in (σ_3, \circ) definito da:

$$\phi_h([1]_{12}) = h.$$

2. L'immagine di un omomorfismo ϕ da un gruppo ciclico G in un gruppo qualsiasi H è un gruppo ciclico: infatti se g è un generatore di G , gli elementi di $\phi(G)$ sono tutti e soli quelli del tipo $\phi(g^n)$ dove $n \in \mathbf{Z}$. Ma $\phi(g^n) = \phi(g)^n$, ovvero tutti gli elementi di $\phi(G)$ sono potenze di $\phi(g)$ che, quindi, genera $\phi(G)$. Nel nostro caso particolare se esistesse un omomorfismo suriettivo da $(\mathbf{Z}_{12}, +)$ su (σ_3, \circ) avremmo che (σ_3, \circ) dovrebbe essere ciclico. Poiché ciò è falso non esistono omomorfismi suriettivi da $(\mathbf{Z}_{12}, +)$ su (σ_3, \circ) .
3. Dal punto **1** sappiamo che per ogni elemento $h \in \sigma_3$ esiste un omomorfismo ϕ_h da $(\mathbf{Z}_{12}, +)$ in (σ_3, \circ) tale che $\phi_h([1]_{12}) = h$. Inoltre dal punto **2** sappiamo che $\phi_h(\mathbf{Z}_{12})$ è un sottogruppo ciclico di σ_3 generato da $\phi_h([1]_{12})$, cioè da h . Per determinare due omomorfismi distinti f e g da $(\mathbf{Z}_{12}, +)$ a (σ_3, \circ) tali che $f(\mathbf{Z}_{12}) = g(\mathbf{Z}_{12})$ occorre allora determinare, se esistono, due elementi distinti h e k di σ_3 che generano lo stesso sottogruppo. In particolare h e k devono avere lo stesso ordine. Sappiamo che (σ_3, \circ) possiede un elemento di ordine 1, 3 elementi di ordine 2 e 2 elementi di ordine 3. Due elementi di ordine 2 distinti generano ovviamente gruppi distinti: avremmo altrimenti un gruppo di ordine 2 che contiene 2 elementi di ordine 2 e l'unità, che ha ordine 1. I due elementi di ordine 3 generano invece lo stesso gruppo. Infatti, un gruppo di ordine 3 può contenere solo elementi di ordine 1 e 3: dal momento che l'unico elemento di periodo 1 è l'unità, un gruppo di ordine 3 contiene esattamente 2 elementi di periodo 3. Dunque se consideriamo il gruppo ciclico generato da un elemento di periodo 3 di (σ_3, \circ) questo deve necessariamente contenere anche l'altro elemento di periodo 3. Concludendo i due omomorfismi f e g cercati esistono e non possono che essere definiti dalle seguenti posizioni:

$$f([1]_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g([1]_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

*I punti **2** e **3** di questo esercizio potevano essere risolti anche determinando esplicitamente le immagini di tutti gli omomorfismi trovati al punto **1**.*

TERZO ESERCIZIO

1. Osserviamo innanzitutto che la matrice A è una matrice a blocchi ottenuta a partire dalle due matrici

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Possiamo quindi Jordanizzare separatamente A' e A'' .

Osserviamo che A' è una matrice triangolare (superiore): i suoi autovalori sono gli elementi lungo la diagonale contati con le opportune molteplicità. Dunque gli autovalori di A' sono $\lambda_1 = 1$ di molteplicità algebrica 1 e $\lambda_2 = 2$ di molteplicità algebrica 2. Ricordiamo che la molteplicità algebrica di un autovalore fornisce la somma delle dimensioni di tutti i blocchi di Jordan relativi a quell'autovalore presenti nella Jordanizzata della matrice. Avremo pertanto un blocco di Jordan

di dimensione 1 relativo all'autovalore 1. Determiniamo un autovettore \mathbf{v}_1 di A' relativo all'autovalore 1. Se $\mathbf{v}_1 = (x, y, z)$ deve essere $(A' - I)^t \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ ovvero

$$\begin{cases} 2y + 2z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

che, risolto, dà $y = z = 0$. Possiamo dunque scegliere come vettore \mathbf{v}_1 il vettore $(1, 0, 0)$. *Ovviamente \mathbf{v}_1 poteva essere determinato immediatamente osservando attentamente la matrice A' .*

Consideriamo ora l'altro autovalore $\lambda_2 = 2$: sia θ l'endomorfismo di \mathbf{R}^3 la cui matrice rispetto alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ di \mathbf{R}^3 sia A' , e sia $\theta_2 = \theta - 2I$. Determiniamo le immagini dei vettori della base canonica tramite le potenze successive di θ_2 (dobbiamo proseguire fino a che troviamo una potenza θ_2^i tale che $\dim \ker \theta_2^i = \text{ma}(2) = 2$, ovvero $\dim \text{Im } \theta_2^i = 1$):

$$\begin{array}{lll} \mathbf{e}_1 & \rightarrow & -\mathbf{e}_1 & \rightarrow & \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 & \rightarrow & 2\mathbf{e}_1 & \rightarrow & -2\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_3 & \rightarrow & 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 & \rightarrow & 4\mathbf{e}_1 \end{array}$$

Si nota facilmente che $\dim \text{Im } \theta_2 = 2$ e $\dim \text{Im } \theta_2^2 = 1$ e dunque $\dim \ker \theta_2 = 1$ e $\dim \ker \theta_2^2 = 2$. Poiché $\dim \ker \theta_2 = 1$ avremo un solo blocco di Jordan relativo all'autovalore 2, e tale blocco avrà dimensione 2. Consideriamo allora la seguente successione dei nuclei (sulla prima riga della tabella abbiamo riportato le loro dimensioni) e le seguenti catene di autovettori generalizzati:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & < & 1 & < & 2 \\ \{\mathbf{0}\} & \subset & \ker \theta_2 & \subset & \ker \theta_2^2 \\ \mathbf{0} & \leftarrow & \mathbf{v}_2 & \leftarrow & \mathbf{v}_3 \end{array}$$

Occorre allora scegliere \mathbf{v}_3 in $\ker \theta_2^2 - \ker \theta_2$: ad esempio scegliamo $\mathbf{v}_3 = 4\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$. Determiniamo così $\mathbf{v}_2 = \theta_2(\mathbf{v}_3) = -6\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2$. Consideriamo ora la matrice

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

le cui colonne sono, rispettivamente, le componenti dei vettori \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 rispetto alla base canonica. Risulta allora $(M')^{-1} A' M' = J'$, dove

$$J' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ripetiamo questo procedimento per la matrice A'' : gli autovalori di A'' sono $\lambda_1 = 1$ di molteplicità algebrica 1 e $\lambda_2 = 2$ di molteplicità algebrica 2. Determiniamo un autovettore \mathbf{v}_4 di A'' relativo all'autovalore 1. Se $\mathbf{v}_4 = (x, y, z)$ deve essere $(A'' - I)^t \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$ ovvero

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 2x + y = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

che, risolto, dà $y = -2x$ e $z = 4x$. Possiamo dunque scegliere come vettore \mathbf{v}_4 il vettore $(1, -2, 4)$.

Consideriamo ora l'altro autovalore $\lambda_2 = 2$: sia η l'endomorfismo di \mathbf{R}^3 la cui matrice rispetto alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ di \mathbf{R}^3 sia A' , e sia $\eta_2 = \eta - 2I$. Determiniamo le immagini dei vettori della base canonica tramite le potenze successive di η_2 (dobbiamo proseguire fino a che troviamo una potenza η_2^i tale che $\dim \ker \eta_2^i = \text{ma}(2) = 2$, ovvero $\dim \text{Im } \eta_2^i = 1$):

$$\begin{array}{llll} \mathbf{e}_1 & \rightarrow & -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 & \rightarrow & \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 & \rightarrow & 3\mathbf{e}_3 & \rightarrow & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_3 & \rightarrow & \mathbf{0} & \rightarrow & \end{array}$$

Si nota facilmente che $\dim \text{Im } \eta_2 = 2$ e $\dim \text{Im } \eta_2^2 = 1$ e dunque $\dim \ker \eta_2 = 1$ e $\dim \ker \eta_2^2 = 2$. Poiché $\dim \ker \eta_2 = 1$ avremo un solo blocco di Jordan relativo all'autovalore 2, e tale blocco avrà dimensione 2. Consideriamo allora la seguente successione dei nuclei (sulla prima riga della tabella abbiamo riportato le loro dimensioni) e le seguenti catene di autovettori generalizzati:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & < & 1 & < & 2 \\ \{\mathbf{0}\} & \subset & \ker \eta_2 & \subset & \ker \eta_2^2 \\ \mathbf{0} & \leftarrow & \mathbf{v}_5 & \leftarrow & \mathbf{v}_6 \end{array}$$

Occorre allora scegliere \mathbf{v}_6 in $\ker \eta_2^2 - \ker \eta_2$: ad esempio scegliamo $\mathbf{v}_6 = \mathbf{e}_2$. Determiniamo così $\mathbf{v}_5 = \eta_2(\mathbf{v}_6) = 3\mathbf{e}_3$. Consideriamo ora la matrice

$$M'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

le cui colonne sono, rispettivamente, le componenti dei vettori \mathbf{v}_4 , \mathbf{v}_5 e \mathbf{v}_6 rispetto alla base canonica. Risulta allora $(M'')^{-1}A''M'' = J''$, dove

$$J'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Allora se:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

si ha che $M^{-1}AM = J$.

- Al punto 1 abbiamo determinato gli autovalori di A e la sua forma canonica di Jordan: in particolare da questa possiamo osservare che l'autovalore 1 ha indice 1 e l'autovalore 2 ha indice 2 (ricordiamo che l'indice di un autovalore coincide con la massima dimensione dei blocchi di Jordan relativi a quell'autovalore presenti nella forma canonica). Ora, è possibile definire $\phi(A)$, dove ϕ è

una funzione reale di variabile reale, se e solo se ϕ è definita sullo spettro di A , ovvero se sono definiti i valori $\phi(1), \phi(2), \phi'(2)$. Verifichiamo queste condizioni per le funzioni f e g . Si ha che $f(1) = \sqrt[3]{1-2} = -1$, $f(2) = \sqrt[3]{2-2} = 0$, e la derivata prima di f valutata in x è $f'(x) = \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}}$, che non è definita in 2: dunque f non è definita sullo spettro di A e, quindi, $f(A)$ non è definita. Per quanto riguarda g osserviamo che $g(1) = \sqrt[3]{1-1} = 0$, $g(2) = \sqrt[3]{2-1} = 1$, e la derivata prima di g valutata in x è $g'(x) = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}$, che è definita in 2: precisamente $g'(2) = \frac{1}{3}$. Dunque g è definita sullo spettro di A . Per calcolare $g(A)$ possiamo seguire due strade:

- Calcoliamo $g(J)$:

$$g(J) = \begin{pmatrix} g(1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(2) & g'(2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g(2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g(2) & g'(2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g(2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ora $g(A) = Mg(J)M^{-1}$.

- Alternativamente osserviamo che il grado del polinomio minimo di A (che è $(x-1)(x-2)^2$) è 3 e, pertanto, esiste un polinomio $p(x)$ di grado minore di 3 che coincide con g sullo spettro di A , ovvero $p(1) = g(1)$, $p(2) = g(2)$, $p'(2) = g'(2)$. Se $p(x) = a + bx + cx^2$ (e, dunque, $p'(x) = b + 2cx$) ciò significa che:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + 2b + 4c = 1 \\ b + 4c = 1/3 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema troviamo $a = -\frac{7}{3}$, $b = 3$, $c = -\frac{2}{3}$. Dunque $g(A) = p(A)$ ovvero

$$g(A) = -\frac{7}{3}I + 3A - \frac{2}{3}A^2$$

e, sviluppando i calcoli, troviamo

$$g(A) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$