

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
PROVA SCRITTA DEL 23 SETTEMBRE 1999
Tempo assegnato: 2 ore e 30 minuti

PRIMO ESERCIZIO [8 punti]

Si considerino i sottoinsieme A_1 e A_2 di \mathbf{N}^2 così definiti:

$$A_1 = \{(x, y) \mid x + 2y - 4 = 0\};$$

$$A_2 = \{(x, y) \mid x - 3y - 4 = 0\}$$

1. Si calcoli la cardinalità di A_1 e A_2 .
2. Nel caso in cui A_i (per $i = 1, 2$) abbia cardinalità \aleph_0 si determini esplicitamente una corrispondenza biunivoca tra A_i e \mathbf{N} .

N. B.: l'insieme \mathbf{N} non comprende il numero 0.

SECONDO ESERCIZIO [8 punti]

Siano dati un gruppo G e un intero positivo n . Si consideri il sottoinsieme di G

$$G^{(n)} = \{g^n \mid g \in G\}.$$

1. Si dimostri che se G è abeliano allora $G^{(n)}$ è un sottogruppo di G .
2. Nel caso in cui G sia il gruppo simmetrico su tre elementi (σ_3, \circ) si stabilisca se $G^{(2)}$ e $G^{(3)}$ sono sottogruppi di G .

TERZO ESERCIZIO [7 punti]

Si consideri la matrice a coefficienti reali:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Si determini la forma canonica di Jordan J di A e si trovi una matrice invertibile M tale che $J = M^{-1}AM$.
2. Si calcoli $\sin A$ e si determinino tutti i polinomi $f(x)$ tali che $f(A) = \sin A$.

QUARTO ESERCIZIO [7 punti]

Sia p un numero primo e si consideri il campo \mathbf{Z}_p delle classi di resto modulo p : si ricorda che $\mathbf{Z}_p^3[x]$ è lo spazio vettoriale formato dai polinomi a coefficienti in \mathbf{Z}_p di grado minore di 3. Si consideri l'applicazione $\phi : \mathbf{Z}_p^3[x] \rightarrow \mathbf{Z}_p^3$ così definita:

$$\phi(f(x)) := \left(f\left([0]_p\right), f\left([1]_p\right), f\left([-1]_p\right) \right).$$

1. Si dimostri che ϕ è un omomorfismo di \mathbf{Z}_p -spazi vettoriali.
2. Si determinino $\ker \phi$ e $\text{Im } \phi$ e le rispettive dimensioni nel caso in cui $p = 2$ e $p = 5$.

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
RISOLUZIONE DEL TEMA D'ESAME DEL 23 SETTEMBRE
1999

PRIMO ESERCIZIO

1. Osserviamo che se $(x, y) \in \mathbf{N}^2$ e $y \geq 2$ allora $x + 2y - 4 > 0$. Dunque A_1 può contenere solo coppie del tipo $(x, 1)$: affinché una coppia di questo tipo stia in A_1 deve essere $x + 2 - 4 = 0$, ovvero $x = 2$. Pertanto $A_1 = \{(2, 1)\}$, e, quindi, $|A_1| = 1$. Per quanto riguarda A_2 osserviamo che è formato dagli infiniti elementi del tipo $(3y + 4, y)$ al variare di $y \in \mathbf{N}$. Possiamo allora concludere che $|A_2| = \aleph_0$.
2. Una corrispondenza biunivoca tra \mathbf{N} e A_2 è implicitamente già fornita nella discussione del punto 1: è quella che associa al numero naturale y la coppia $(3y + 4, y)$.

SECONDO ESERCIZIO

1. Osserviamo che $G^{(n)}$ è un sottoinsieme non vuoto di G . Due elementi arbitrari di $G^{(n)}$ possono essere scritti come g^n e h^n con g e h elementi di G opportunamente scelti. Poiché G è abeliano, il loro prodotto $g^n h^n$ è uguale a $(gh)^n$; ma $(gh)^n \in G^{(n)}$, dunque $G^{(n)}$ è chiuso rispetto al prodotto. Infine dato un elemento qualsiasi g^n di $G^{(n)}$ il suo inverso $(g^n)^{-1} = (g^{-1})^n$ appartiene ancora a $G^{(n)}$. Abbiamo così dimostrato che $G^{(n)}$ è un sottogruppo di G .
2. Poiché in questo caso il gruppo G non è abeliano non possiamo utilizzare il risultato trovato al punto 1 per verificare se $G^{(2)}$ e $G^{(3)}$ sono sottogruppi di G . Dobbiamo pertanto determinare esplicitamente $G^{(2)}$ e $G^{(3)}$. Sappiamo che (σ_3, \circ) contiene 3 elementi di periodo 2 che indichiamo con s_1, s_2 e s_3 , 2 elementi di periodo 3 che indichiamo con r_1 e r_2 , e, ovviamente, l'identità Id che è l'unico elemento di periodo 1. L'identità e i tre elementi di periodo 2 hanno seconda potenza uguale all'identità, mentre $r_1^2 = r_2$ e $r_2^2 = r_1$. Dunque

$$G^{(2)} = \{\text{Id}, r_1, r_2\}:$$

questo è il sottogruppo ciclico generato da r_1 (o da r_2). Pertanto $G^{(2)}$ è un sottogruppo. Per quanto riguarda $G^{(3)}$ osserviamo che l'identità e i due elementi di periodo 3 hanno terza potenza uguale all'identità, mentre $s_i^3 = s_i$ per $i = 1, \dots, 3$. Dunque

$$G^{(2)} = \{\text{Id}, s_1, s_2, s_3\}:$$

questo non è un sottogruppo di G perché, altrimenti, per il teorema di Lagrange il suo ordine dovrebbe dividere l'ordine di G .

TERZO ESERCIZIO

1. Calcoliamo il polinomio caratteristico della matrice A :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4.$$

Dunque A ha come unico autovalore 0 con molteplicità algebrica 4. Sia η l'endomorfismo di \mathbf{R}^4 la cui matrice rispetto alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ di \mathbf{R}^4 sia A . Determiniamo le immagini dei vettori della base canonica tramite le potenze successive di η (dobbiamo proseguire fino a che troviamo una potenza η^i tale che $\dim \ker \eta^i = \text{ma}(0) = 4$, ovvero $\dim \text{Im } \eta^i = 0$):

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{e}_1 & \longrightarrow & \mathbf{e}_3 & \longrightarrow & \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4 & \longrightarrow & \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 & \longrightarrow & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 & \longrightarrow & \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4 & \longrightarrow & \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_3 & \longrightarrow & \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4 & \longrightarrow & \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_4 & \longrightarrow & \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 & \longrightarrow & -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_4 & \longrightarrow & -\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 & \longrightarrow & \mathbf{0} \end{array}$$

Dunque $\eta^4 = 0$, mentre $\eta^3 \neq 0$: pertanto l'indice di 0 è 4. La dimensione massima dei blocchi di Jordan relativi all'autovalore 0 presenti nella forma canonica di Jordan di A è dunque 4. Poiché A ha dimensione 4, ciò significa che la forma canonica di Jordan di A è un blocco di Jordan relativo all'autovalore 0 di dimensione 4. *Questo poteva anche essere dedotto dal fatto che il numero di blocchi di Jordan relativi a un certo autovalore è uguale alla molteplicità algebrica dell'autovalore stesso. In questo caso $\text{mg}(0) = 4 - \text{rk}(A - 0 \cdot I) = 1$.* Consideriamo allora la seguente successione dei nuclei (sulla prima riga della tabella abbiamo riportato le loro dimensioni) e le seguenti catene di autovettori generalizzati:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & < & 1 & < & 2 & < & 3 & < & 4 \\ \{\mathbf{0}\} & \subset & \ker \eta & \subset & \ker \eta^2 & \subset & \ker \eta^3 & \subset & \ker \eta^4 \\ \mathbf{0} & \longleftarrow & \mathbf{v}_1 & \longleftarrow & \mathbf{v}_2 & \longleftarrow & \mathbf{v}_3 & \longleftarrow & \mathbf{v}_4 \end{array}$$

Occorre allora scegliere \mathbf{v}_4 in $\ker \eta^4 - \ker \eta^3$: ad esempio scegliamo $\mathbf{v}_4 = \mathbf{e}_1$. Determiniamo così

$$\mathbf{v}_3 = \eta(\mathbf{v}_4) = \mathbf{e}_3, \mathbf{v}_2 = \eta(\mathbf{v}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4, \mathbf{v}_1 = \eta(\mathbf{v}_2) = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3.$$

Consideriamo ora la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono, rispettivamente, le componenti dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ e \mathbf{v}_4 rispetto alla base canonica. Risulta allora $M^{-1}AM = J$, dove

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. La matrice A ha come unico autovalore 0 di indice 4: dunque il polinomio minimo di A è $m_A(x) = x^4$. La funzione \sin è definita e infinitamente volte derivabile su tutto \mathbf{R} . In particolare \sin è definito sullo spettro di A e dunque $\sin A$ è definito. Determiniamo ora un polinomio che coincide con \sin sullo spettro di A . Poiché il polinomio minimo di A ha grado 4 esiste uno e un solo polinomio di grado al più 3 che soddisfa tale condizione. Sia allora

$$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

tale polinomio. Affermare che $p(x)$ coincide con \sin sullo spettro di A equivale a dire che

$$p(0) = \sin 0, p'(0) = \sin' 0, p''(0) = \sin'' 0 \text{ e } p'''(0) = \sin''' 0$$

ovvero, calcolando esplicitamente tali derivate:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ 2c = 0 \\ 6d = -1 \end{cases}$$

Dunque

$$p(x) = x - \frac{x^3}{6}.$$

Ma allora

$$\sin A = p(A) = A - \frac{1}{6}A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{7}{6} \\ \frac{7}{6} & 0 & 0 & -\frac{13}{6} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

I polinomi $f(x)$ tali che $f(A) = \sin A$ sono tutti e soli quelli del tipo

$$f(x) = p(x) + m_A(x)g(x)$$

al variare di $g(x)$ in $\mathbf{R}[x]$ ovvero

$$f(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^4g(x).$$

QUARTO ESERCIZIO

1. Consideriamo due elementi $f(x)$ e $g(x)$ di $\mathbf{Z}_p^3[x]$ e due scalari α e β di \mathbf{Z}_p . Ora

$$\begin{aligned} \phi(\alpha f(x) + \beta g(x)) &= \\ &= \left((\alpha f + \beta g)([0]_p), (\alpha f + \beta g)([1]_p), (\alpha f + \beta g)([-1]_p) \right) = \\ &= \left(\alpha f([0]_p) + \beta g([0]_p), \alpha f([1]_p) + \beta g([1]_p), \alpha f([-1]_p) + \beta g([-1]_p) \right) = \\ &= \alpha \left(f([0]_p), f([1]_p), f([-1]_p) \right) + \beta \left(g([0]_p), g([1]_p), g([-1]_p) \right) = \\ &= \alpha \phi(f(x)) + \beta \phi(g(x)). \end{aligned}$$

Dunque ϕ è un omomorfismo di \mathbf{Z}_p -spazi vettoriali.

2. Consideriamo il caso $p = 2$. Un polinomio $f(x)$ appartiene a $\ker \phi$ se e solo se

$$f([0]_2) = f([1]_2) = f([-1]_2) = [0]_2,$$

ovvero, poiché $[1]_2 = [-1]_2$, se e solo se

$$f([0]_2) = f([1]_2) = [0]_2.$$

Dunque $f(x) = a + bx + cx^2 \in \ker \phi$ se e solo se $a = a + b + c = [0]_2$. Risolvendo questo sistema otteniamo $a = [0]_2$, $b = c$. Pertanto

$$\ker \phi = \{bx + bx^2 \mid b \in \mathbf{Z}_2\} :$$

questo è uno spazio vettoriale di dimensione 1, generato da $x + x^2$. Ora

$$\dim \operatorname{Im} \phi = \dim \mathbf{Z}_p^3[x] - \dim \ker \phi = 2.$$

Scelta ad esempio la base $\{1, x, x^2\}$ per $\mathbf{Z}_p^3[x]$ possiamo calcolare le immagini di questi vettori fino a che otteniamo uno spazio di dimensione 2. Ora $\phi(1) = ([1]_2, [1]_2, [1]_2)$ e $\phi(x) = ([0]_2, [1]_2, [1]_2)$: questi due vettori, essendo linearmente indipendenti, formano una base per $\operatorname{Im} \phi$.

Consideriamo invece il caso in cui $p = 5$: analogamente a prima un polinomio $f(x) = a + bx + cx^2 \in \ker \phi$ se e solo se

$$f([0]_5) = f([1]_5) = f([-1]_5) = [0]_5,$$

ovvero se e solo se

$$\begin{cases} a & = & [0]_5 \\ a + b + c & = & [0]_5 \\ a - b + c & = & [0]_5 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema troviamo $a = b = c = [0]_5$, cioè $\ker \phi = \{[0]_5\}$ (e, dunque $\dim \ker \phi = 0$). Inoltre

$$\dim \operatorname{Im} \phi = \dim \mathbf{Z}_p^3[x] - \dim \ker \phi = 3.$$

Poiché $\dim \mathbf{Z}_p^3$ questo significa che $\operatorname{Im} \phi = \mathbf{Z}_p^3$.