

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
PROVA SCRITTA DEL 25 GENNAIO 2000
Tempo assegnato: 2 ore e 30 minuti

PRIMO ESERCIZIO [7 punti]

1. Determinare la cardinalità del sottoinsieme $A = \{(x, y) \mid 2 \leq y \leq x + 2\}$ di \mathbf{N}^2 .
2. Nel caso in cui A abbia cardinalità \aleph_0 determinare una corrispondenza biunivoca tra \mathbf{N} e A ; nel caso in cui A abbia cardinalità finita n determinare una corrispondenza biunivoca tra $\{1, 2, \dots, n\}$ e A .

N. B.: l'insieme \mathbf{N} non comprende il numero 0.

SECONDO ESERCIZIO [8 punti]

Si consideri, per ogni valore del parametro reale k , il sottoinsieme L_k di $M(2, \mathbf{R})$ formato dalle matrici del tipo:

$$\begin{pmatrix} a & kb \\ b & a \end{pmatrix}$$

al variare di a e b in \mathbf{R} .

1. Si dimostri che L_k è un sottoanello commutativo e dotato di unità di $M(2, \mathbf{R})$.
2. Stabilire per quali valori di k l'insieme L_k è un campo.

TERZO ESERCIZIO [8 punti]

Siano date le matrici a coefficienti reali:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad B_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ k & 2 & -4 - k \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

dove k è un parametro reale.

1. Si stabilisca per quali valori del parametro k le due matrici sono simili.
2. Fissato $k = 1$ determinare $M \in GL(3, \mathbf{R})$ tale che $A = M^{-1}B_1M$.

QUARTO ESERCIZIO [7 punti]

Si discuta e risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in \mathbf{Z}_{11} :

$$\begin{cases} x & + & z & + & w & = & [2]_{11} \\ [4]_{11}x & + & [5]_{11}y & + & [10]_{11}z & + & [7]_{11}w & = & [4]_{11} \\ [6]_{11}x & + & [6]_{11}y & & & + & [3]_{11}w & = & [5]_{11} \end{cases}$$

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
RISOLUZIONE DEL TEMA D'ESAME DEL 25 GENNAIO 2000

PRIMO ESERCIZIO

1. L'insieme \mathbf{N}^2 ha cardinalità numerabile. Poiché A è un sottoinsieme infinito (contiene infatti gli infiniti elementi del tipo $(x, 2)$ con $x \in \mathbf{N}$) di un insieme numerabile sappiamo che A è anch'esso numerabile.
2. Osserviamo che per ciascun numero naturale x esistono esattamente $x + 1$ elementi di A del tipo (x, y) (infatti y varia tra 2 e $x + 2$). Chiamiamo allora A_x l'insieme formato dagli $x + 1$ elementi di A del tipo (x, y) : pertanto A è l'unione disgiunta degli insiemi A_x al variare di x in \mathbf{N} . Se enumeriamo gli elementi di ciascun A_x rispetto alla loro seconda componente crescente, possiamo allora ottenere un'enumerazione di A elencando prima gli elementi di A_1 poi quelli di A_2 e così via. In questa enumerazione allora l'elemento (x, y) è preceduto dagli elementi di $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{x-1}$ (che sono in numero di $2 + 3 + \dots + x = \frac{x(x+1)}{2} - 1$) e dagli elementi (x, y') con $y' < y$ (che, ricordando che $y' \geq 2$ sono in numero di $y - 2$). Complessivamente (x, y) è preceduto da $\frac{x(x+1)}{2} - 1 + y - 2$ elementi. Pertanto l'applicazione $f : A \rightarrow \mathbf{N}$ definita da:

$$f(x, y) = \frac{x(x+1)}{2} + y - 2$$

è una corrispondenza biunivoca come quella cercata.

SECONDO ESERCIZIO

1. Un sottoinsieme di un anello è un sottoanello se e solo se è non vuoto, è chiuso rispetto alla somma, è chiuso rispetto al prodotto e contiene l'opposto di ogni suo elemento. Applichiamo questo criterio a L_k .

Il sottoinsieme L_k è chiaramente non vuoto: possiamo infatti assegnare valori arbitrari ai parametri a e b e ottenere una matrice di L_k .

Consideriamo ora due matrici

$$A = \begin{pmatrix} a & kb \\ b & a \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a' & kb' \\ b' & a' \end{pmatrix}$$

di L_k . Allora:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a + a' & k(b + b') \\ b + b' & a + a' \end{pmatrix}, \\ AB &= \begin{pmatrix} aa' + kbb' & k(ab' + ba') \\ ab' + ba' & aa' + kbb' \end{pmatrix}, \\ BA &= \begin{pmatrix} aa' + kbb' & k(ab' + ba') \\ ab' + ba' & aa' + kbb' \end{pmatrix}, \\ -A &= \begin{pmatrix} -a & k(-b) \\ -b & -a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si ha che $A + B$, AB e B appartengono a L_k che è, quindi, un sottoanello di $M(2, \mathbf{R})$. Inoltre $AB = BA$ e pertanto L_k è commutativo. Infine assegnando valore 1 al parametro a e valore 0 al parametro b otteniamo la matrice identica di $M(2, \mathbf{R})$: pertanto L_k è dotato di unità.

Si noti che, in generale, un sottoanello di un anello dotato di unità può essere dotato di unità anche se non contiene l'unità dell'anello : si consideri ad esempio il sottoinsieme L di $M(2, \mathbf{R})$ formato dalle matrici del tipo:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questo è un sottoanello di $M(2, \mathbf{R})$ che non contiene la matrice identica, ma L ha come unità la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si può anzi facilmente verificare che L è un campo, ovvero che tutte le matrici non nulle di L hanno un'inversa rispetto all'identità di L , anche se nessuna di esse è invertibile in $M(2, \mathbf{R})$.

2. Dal momento che l'unità di L_k è la matrice identità di $M(2, \mathbf{R})$, una matrice A è invertibile in L_k se e solo se esiste $B \in L_k$ tale che $AB = BA = I$, ovvero se e solo se A è invertibile in $M(2, \mathbf{R})$ (cioè $\det A \neq 0$) e $A^{-1} \in L_k$. Dunque L_k è un campo se e solo se, per ogni $A \in L_k$ con $A \neq 0$, si ha $\det A \neq 0$ e $A^{-1} \in L_k$. Se allora

$$A = \begin{pmatrix} a & kb \\ b & a \end{pmatrix},$$

si ha che $\det A = a^2 - kb^2$. Se $k \geq 0$ allora esiste $h \in \mathbf{R}$ tale che $h^2 = k$: ma allora la matrice

$$\begin{pmatrix} h & k \\ 1 & h \end{pmatrix}$$

è una matrice non nulla di L_k con determinante nullo, e, dunque, L_k non è un campo. Se invece $k < 0$, si ha che $a^2 - kb^2 = a^2 + (-k)b^2$ si annulla solo per $a = b = 0$. Dunque tutte le matrici non nulle di L_k sono matrici invertibili in $M(2, \mathbf{R})$. Inoltre

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2 - kb^2} & k \frac{b}{kb^2 - a^2} \\ \frac{b}{kb^2 - a^2} & \frac{a}{a^2 - kb^2} \end{pmatrix}$$

e, dunque $A^{-1} \in L_k$. Pertanto L_k è un campo. In conclusione L_k è un campo se e solo se $k < 0$.

TERZO ESERCIZIO

1. Due matrici a coefficienti reali sono simili se e solo se hanno la stessa forma canonica di Jordan (eventualmente complessa) a meno di scambi di blocchi.

Cominciamo allora con il calcolare il polinomio caratteristico di entrambe le matrici. Si ha:

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = -\lambda^3, \\ f_{B_k}(\lambda) &= \det(B_k - \lambda I) = -\lambda^3. \end{aligned}$$

Dunque entrambe le matrici hanno come unico autovalore 0 di molteplicità algebrica 3, e, pertanto hanno forma canonica di Jordan composta da blocchi relativi a tale autovalore. Calcoliamo ora la molteplicità geometrica di 0 relativamente a entrambe le matrici. Si ha:

$$\begin{aligned} \text{mg}_A(0) &= 3 - \text{rk}(A - 0 \cdot I) = 1, \\ \text{mg}_{B_k}(0) &= 3 - \text{rk}(B_k - 0 \cdot I) = \begin{cases} 1 & \text{se } k \neq 0 \\ 2 & \text{se } k = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Condizione necessaria affinché le A e B_k siano simili è che la molteplicità geometrica di 0 sia la stessa rispetto a entrambe le matrici, dunque che k sia non nullo. In tal caso 0 ha molteplicità geometrica 1 rispetto sia ad A sia a B_k : questo vuol dire che la forma canonica di Jordan sia di A che di B_k è formata da un unico blocco di Jordan che deve, necessariamente, avere dimensione 3. Pertanto se $k \neq 0$ la forma canonica di Jordan di A e B_k coincidono. In conclusione A è simile a B_k se e solo se $k \neq 0$.

2. Sappiamo, dalla discussione del punto precedente, che tanto A quanto B_1 sono simili alla matrice di Jordan:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vogliamo allora determinare $R, S \in \text{GL}(3, \mathbf{R})$ tali che $J = R^{-1}AR = S^{-1}B_1S$. Indichiamo con η l'endomorfismo di \mathbf{R}^3 che rispetto alla base canonica si rappresenta con la matrice A . Dobbiamo allora determinare una catena di autovettori generalizzati di A :

$$\mathbf{v}_3 \rightarrow \mathbf{v}_2 = \eta(\mathbf{v}_3) \rightarrow \mathbf{v}_1 = \eta(\mathbf{v}_2) \rightarrow \mathbf{0} = \eta(\mathbf{v}_1).$$

Calcoliamo le immagini dei vettori della base canonica tramite le potenze successive di η :

$$\begin{array}{llll} \mathbf{e}_1 & \longrightarrow & 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 & \longrightarrow & 2\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 & \longrightarrow & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 & \longrightarrow & 2\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3 & \longrightarrow & 2\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 & \longrightarrow & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_3 & \longrightarrow & -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 & \longrightarrow & -\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 & \longrightarrow & \mathbf{0} \end{array}$$

Dobbiamo allora scegliere $\mathbf{v}_3 \in \ker \eta^3 - \ker \eta^2$. Poniamo allora ad esempio $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_3$ e otteniamo $\mathbf{v}_2 = \eta(\mathbf{v}_3) = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v}_1 = \eta(\mathbf{v}_2) = -\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$. Se ora consideriamo la matrice

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono, rispettivamente, le componenti dei vettori \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 rispetto alla base canonica, risulta allora $R^{-1}AR = J$.

Analogamente indichiamo con θ l'endomorfismo di \mathbf{R}^3 che rispetto alla base canonica si rappresenta con la matrice B_1 . Dobbiamo allora determinare una catena di autovettori generalizzati di B_1 :

$$\mathbf{u}_3 \rightarrow \mathbf{u}_2 = \theta(\mathbf{u}_3) \rightarrow \mathbf{u}_1 = \theta(\mathbf{u}_2) \rightarrow \mathbf{0} = \theta(\mathbf{u}_1).$$

Calcoliamo le immagini dei vettori della base canonica tramite le potenze successive di θ :

$$\begin{array}{lclclcl} \mathbf{e}_1 & \longrightarrow & \mathbf{e}_2 & \longrightarrow & \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 & \longrightarrow & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 & \longrightarrow & \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_3 & \longrightarrow & -2\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 & \longrightarrow & -\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 & \longrightarrow & \mathbf{0} \end{array}$$

Dobbiamo allora scegliere $\mathbf{u}_3 \in \ker \theta^3 - \ker \theta^2$. Poniamo allora ad esempio $\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1$ e otteniamo $\mathbf{u}_2 = \theta(\mathbf{u}_3) = \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{u}_1 = \theta(\mathbf{u}_2) = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. Se ora consideriamo la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono, rispettivamente, le componenti dei vettori \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 e \mathbf{u}_3 rispetto alla base canonica, risulta allora $S^{-1}B_1S = J$.

Ora $R^{-1}AR = S^{-1}B_1S$. Moltiplicando a sinistra per R e a destra per R^{-1} entrambi i membri di questa relazione otteniamo $A = RS^{-1}B_1SR^{-1}$. Possiamo allora porre $M = SR^{-1}$ in modo tale che $A = M^{-1}B_1M$.

QUARTO ESERCIZIO

La matrice del sistema è:

$$A = \begin{pmatrix} [1]_{11} & [0]_{11} & [1]_{11} & [1]_{11} \\ [4]_{11} & [5]_{11} & [10]_{11} & [7]_{11} \\ [6]_{11} & [6]_{11} & [0]_{11} & [3]_{11} \end{pmatrix}.$$

Calcoliamone il rango: il minore formato dall'intersezione delle prime 2 righe con le prime 2 colonne

$$\begin{pmatrix} [1]_{11} & [0]_{11} \\ [4]_{11} & [5]_{11} \end{pmatrix}$$

ha determinante $[5]_{11}$ che è non nullo. Consideriamo allora i due minori di ordine 3 contenenti il minore di ordine 2 appena determinato e che si possono estrarre dalla matrice A

$$\begin{pmatrix} [1]_{11} & [0]_{11} & [1]_{11} \\ [4]_{11} & [5]_{11} & [10]_{11} \\ [6]_{11} & [6]_{11} & [0]_{11} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} [1]_{11} & [0]_{11} & [1]_{11} \\ [4]_{11} & [5]_{11} & [7]_{11} \\ [6]_{11} & [6]_{11} & [3]_{11} \end{pmatrix}.$$

Entrambe questi due minori hanno determinante nullo. Pertanto il rango di A è 2. Consideriamo ora la matrice completa del sistema:

$$A^* = \begin{pmatrix} [1]_{11} & [0]_{11} & [1]_{11} & [1]_{11} & [2]_{11} \\ [4]_{11} & [5]_{11} & [10]_{11} & [7]_{11} & [4]_{11} \\ [6]_{11} & [6]_{11} & [0]_{11} & [3]_{11} & [5]_{11} \end{pmatrix}.$$

Per determinare il rango di A^* è sufficiente calcolare il determinante dei minori di ordine 3 contenenti il minore di ordine 2 con determinante non nullo precedentemente determinato. Due di questi minori sono anche minori di A e perciò il loro determinante è già stato calcolato. È pertanto sufficiente calcolare il determinante del minore:

$$\begin{pmatrix} [1]_{11} & [0]_{11} & [2]_{11} \\ [4]_{11} & [5]_{11} & [4]_{11} \\ [6]_{11} & [6]_{11} & [5]_{11} \end{pmatrix}.$$

Poiché questo determinante è nullo possiamo concludere che il rango di A^* è 2. Poiché $\text{rk } A = \text{rk } A^* = 2$, dal teorema di Rouché-Capelli segue che il sistema è risolubile e le soluzioni dipendono da (numero di incognite)-(rango della matrice) = $4 - 2 = 2$ parametri. Il sistema è equivalente al sistema formato dalle equazioni individuate da un minore di A con determinante non nullo di ordine massimo, ad esempio quello già determinato formato dall'intersezione delle prime 2 righe con le prime 2 colonne. Dunque il sistema è equivalente a:

$$\begin{cases} x & + & z & + & w & = & [2]_{11} \\ [4]_{11} x & + & [5]_{11} y & + & [10]_{11} z & + & [7]_{11} w & = & [4]_{11} \end{cases}$$

Possiamo ora ricavare x in termini di z e w dalla prima equazione e sostituire il risultato nella seconda:

$$\begin{cases} x & = & [2]_{11} - z - w \\ [4]_{11} ([2]_{11} - z - w) & + & [5]_{11} y + [10]_{11} z + [7]_{11} w & = & [4]_{11} \end{cases}$$

e determinare poi y in termini di z e w dalla seconda equazione:

$$\begin{cases} x & = & [2]_{11} - z - w \\ y & = & [5]_{11}^{-1} ([7]_{11} + [5]_{11} z + [8]_{11} w) - [8]_{11} - z - [6]_{11} w \end{cases}$$

dove abbiamo utilizzato la relazione $[5]_{11}^{-1} = [9]_{11}$.