

**ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
PROVA SCRITTA DEL 26 GENNAIO 1998
Tempo assegnato: 2 ore e 30 minuti**

PRIMO ESERCIZIO [7 punti]

Si consideri il sottoinsieme di \mathbf{Z}^2 :

$$A = \{(n, m) \mid n + m = 5\}.$$

1. Dimostrare che A ha la stessa cardinalità di \mathbf{N} .
2. Dopo aver determinato una corrispondenza biunivoca $f : \mathbf{N} \rightarrow A$, determinare $f(100)$.

SECONDO ESERCIZIO [8 punti]

Si consideri il gruppo $(\mathbf{Z}_{15}, +)$.

1. Determinare tutti i sottogruppi di $(\mathbf{Z}_{15}, +)$, verificando, in particolare, che ne esistono almeno due distinti non banali. Indichiamo con H e K due di questi sottogruppi.
2. Verificare che il sottoinsieme $H + K = \{h + k \mid h \in H, k \in K\}$ è un sottogruppo di $(\mathbf{Z}_{15}, +)$.
3. Dimostrare che $H \subseteq H + K$ e $K \subseteq H + K$.
4. Verificare se $H + K = \mathbf{Z}_{15}$.

TERZO ESERCIZIO [8 punti]

Siano date, al variare del parametro h nei reali, le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 10 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ h & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare per quali valori di h per i quali le matrici A e B sono simili
2. Scelto a piacere uno di tali valori di h , determinare una matrice $M \in \text{GL}(3, \mathbf{R})$ tale che $B = M^{-1}AM$. Specificare quindi se esiste una sola di tali matrici M e nel caso in cui la matrice M non sia unica, determinarne almeno un'altra.

QUARTO ESERCIZIO [7 punti]

Il quarto esercizio riguarda argomenti non facenti parte del programma dell'anno accademico 1999-2000.

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
RISOLUZIONE DEL TEMA D'ESAME DEL 26 GENNAIO 1998

PRIMO ESERCIZIO

1. Diamo innanzitutto una corrispondenza biunivoca g tra \mathbf{Z} e A . Questa si ottiene facilmente ponendo $g(z) = (z, 5 - z)$. Per verificare che g è biunivoca è sufficiente osservare che la funzione $h : A \rightarrow \mathbf{Z}$ definita da $h(n, m) = n$ è l'inversa di g . Dunque A ha la stessa cardinalità di \mathbf{Z} , che, a sua volta, ha, come ben noto, la stessa cardinalità di \mathbf{N} . Dunque A ha la stessa cardinalità di \mathbf{N} .
2. Sappiamo che la funzione $l : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$ definita da

$$l(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{1-n}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

è una corrispondenza biunivoca tra \mathbf{N} e \mathbf{Z} . Dunque $f = g \circ l$ è una corrispondenza biunivoca tra \mathbf{N} e A . In particolare abbiamo:

$$f(100) = g(l(100)) = g(50) = (50, -45).$$

SECONDO ESERCIZIO

1. Sappiamo che $(\mathbf{Z}_{15}, +)$ è un gruppo ciclico, dunque tutti i suoi sottogruppi di sono ciclici. Inoltre se m è un divisore (positivo) dell'ordine di $(\mathbf{Z}_{15}, +)$ (cioè 15), allora esiste esattamente uno e un solo sottogruppo di $(\mathbf{Z}_{15}, +)$ di ordine m : precisamente il sottogruppo generato da $[15/m]_{15}$. Poiché i divisori positivi di 15 sono 1, 3, 5 e 15, il gruppo $(\mathbf{Z}_{15}, +)$ ha 4 sottogruppi, ovvero:

$$\{[0]_{15}\}, \langle [5]_{15} \rangle, \langle [3]_{15} \rangle, \mathbf{Z}_{15}$$

Notiamo in particolare che $(\mathbf{Z}_{15}, +)$ ha esattamente due sottogruppi di non banali.

2. Siano $H = \langle [5]_{15} \rangle$, $K = \langle [3]_{15} \rangle$. Innanzitutto osserviamo che $H + K \neq \emptyset$: infatti se prendiamo un elemento qualsiasi di H (ad esempio $[0]_{15}$) e un elemento qualsiasi di K (ad esempio ancora $[0]_{15}$), la loro somma è, per definizione, un elemento di $H + K$. Siano ora g_1 e g_2 due elementi di $H + K$: allora $g_1 = h_1 + k_1$, $g_2 = h_2 + k_2$, con $h_1, h_2 \in H$ e $k_1, k_2 \in K$. Dunque:

$$g_1 + g_2 = (h_1 + k_1) + (h_2 + k_2) = (h_1 + h_2) + (k_1 + k_2),$$

poiché $(\mathbf{Z}_{15}, +)$ è abeliano. Ma allora $g_1 + g_2 \in H + K$, dal momento che, essendo H e K due sottogruppi, si ha $h_1 + h_2 \in H$ e $k_1 + k_2 \in K$.

Sia, infine, g un elemento di $H + K$: dunque $g = h + k$, con $h \in H$, $k \in K$. Ora

$$-g = -(h + k) = (-h) + (-k),$$

poiché $(\mathbf{Z}_{15}, +)$ è abeliano. Ma allora $-g \in H + K$ poiché, essendo H e K due sottogruppi, si ha $-h \in H$ e $-k \in K$.

Abbiamo dunque verificato che $H + K$ è un sottogruppo.

Si noti che la dimostrazione che abbiamo dato è valida per qualunque coppia H e K di sottogruppi di un gruppo abeliano: in particolare non è necessario elencare esplicitamente tutti gli elementi di $H + K$ per verificare che esso è un sottogruppo di \mathbf{Z}_{15} .

3. Ovviamente H è contenuto in $H + K$: infatti se h è un elemento di H , allora $h = h + [0]_{15} \in H + K$ dal momento che $[0]_{15} \in K$. Analogamente K è contenuto in $H + K$.

Si noti che anche questa proprietà vale in generale per sottogruppi di un gruppo abeliano e non solo in questo caso specifico.

4. Dal punto precedente sappiamo che $H + K$ ha come suoi sottogruppi H e K . Dunque l'ordine di $H + K$ è un multiplo sia di $|H|$ cioè 3, sia di $|K|$ cioè 5. Ma allora $H + K$ ha un ordine che è multiplo di 15 e deve, pertanto, coincidere con \mathbf{Z}_{15} .

In maniera meno elegante, l'esercizio poteva essere risolto determinando esplicitamente l'insieme $H + K$ (scrivendo tutte le possibili somme del tipo $h + k$ con $h \in H$ e $k \in K$) e verificando poi le proprietà richieste ai punti 2, 3 e 4 dell'esercizio.

TERZO ESERCIZIO

1. Due matrici quadrate reali sono simili se e solo se, a meno di scambi di blocchi, hanno la stessa forma canonica di Jordan (eventualmente a coefficienti complessi). In particolare è necessario che le due matrici abbiano lo stesso polinomio caratteristico. Calcoliamo allora i polinomi caratteristici delle matrici A e B .

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -5 & 10 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ -2 & 2 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1,$$

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ h & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^3.$$

Dunque le due matrici hanno lo stesso polinomio caratteristico e l'unico autovalore $\lambda_1 = 1$ di molteplicità algebrica 3.

Determiniamo ora la forma canonica di Jordan di A . Sappiamo che la molteplicità geometrica di 1, pensato come autovalore di A , è uguale al numero di blocchi di Jordan relativi all'autovalore 1 presenti nella forma canonica di A . Ma:

$$\text{mg}_A(1) = 3 - \text{car}(A - I) = 3 - \text{car} \begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = 2.$$

Dunque la forma canonica di Jordan di A è composta da due blocchi relativi all'autovalore 1. Poiché A ha dimensione 3 la sua forma canonica di Jordan è allora necessariamente del tipo seguente:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determiniamo ora la molteplicità geometrica di 1, pensato come autovalore di B . Risulta:

$$\text{mg}_B(1) = 3 - \text{car}(B - I) = 3 - \text{car} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ h & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{se } h = 0 \\ 1 & \text{se } h \neq 0 \end{cases}$$

Dunque la forma canonica di Jordan di B è formata da due blocchi relativi all'autovalore 1 (e, dunque, coincide, a meno di scambi di blocchi, con J) se e solo se $h = 0$. Ma allora A e B sono simili se e solo se $h = 0$.

2. Determiniamo innanzitutto una matrice invertibile R tale che $R^{-1}AR = J$. Per far ciò consideriamo l'endomorfismo η di \mathbf{R}^3 la cui matrice rispetto alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ di \mathbf{R}^3 sia A , e sia $\eta_1 = \eta - I$. Determiniamo le immagini dei vettori della base canonica tramite η_1 e η_1^2 (dobbiamo calcolare le potenze di η_1 fino al grado uguale all'indice dell'autovalore 1):

$$\begin{array}{llll} \mathbf{e}_1 & \rightarrow & 5\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 & \rightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 & \rightarrow & -5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 & \rightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_3 & \rightarrow & 10\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3 & \rightarrow \mathbf{0} \end{array}$$

Consideriamo allora la seguente successione dei nuclei (sulla prima riga della tabella abbiamo riportato le loro dimensioni) e le seguenti catene di autovettori generalizzati:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & < & 2 & < & 3 \\ \{\mathbf{0}\} & \subset & \ker \eta_1 & \subset & \ker \eta_1^2 \\ \mathbf{0} & \leftarrow & \mathbf{v}_1 & \leftarrow & \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{0} & \leftarrow & \mathbf{v}_3 & & \end{array}$$

Occorre allora scegliere \mathbf{v}_2 in $\ker \eta_1^2 - \ker \eta_1$: ad esempio $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1$. Determiniamo così $\mathbf{v}_1 = \eta_1(\mathbf{v}_2) = 5\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$. Dobbiamo ora determinare \mathbf{v}_3 in modo tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ sia una base di $\ker \eta_1$. Poniamo ad esempio $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. Consideriamo ora la matrice

$$R = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono, rispettivamente, le componenti dei vettori \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 rispetto alla base canonica. Risulta allora $R^{-1}AR = J$.

Analogamente determiniamo una matrice invertibile S tale che $S^{-1}BS = J$ (dove in B abbiamo imposto $h = 0$). Consideriamo allora l'endomorfismo θ di \mathbf{R}^3 la cui matrice rispetto alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ di \mathbf{R}^3 sia B , e sia $\theta_1 = \theta - I$. Determiniamo le immagini dei vettori della base canonica tramite

θ_1 e θ_1^2 (come prima calcoliamo le potenze di θ_1 fino al grado uguale all'indice dell'autovalore 1):

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{e}_1 & \rightarrow & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 & \rightarrow & 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \rightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_3 & \rightarrow & \mathbf{0} \end{array}$$

Consideriamo allora la seguente successione dei nuclei (sulla prima riga della tabella abbiamo riportato le loro dimensioni) e le seguenti catene di autovettori generalizzati:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & < & 2 & < & 3 \\ \{\mathbf{0}\} & \subset & \ker \theta_1 & \subset & \ker \theta_1^2 \\ \mathbf{0} & \leftarrow & \mathbf{u}_1 & \leftarrow & \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{0} & \leftarrow & \mathbf{u}_3 \end{array}$$

Occorre allora scegliere \mathbf{u}_2 in $\ker \theta_1^2 - \ker \theta_1$: ad esempio scegliamo $\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_2$. Determiniamo così $\mathbf{u}_1 = \theta_1(\mathbf{u}_2) = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$. Dobbiamo ora determinare \mathbf{u}_3 in modo tale che $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3\}$ sia una base di $\ker \theta_1$. Poniamo ad esempio $\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1$. Consideriamo ora la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono, rispettivamente, le componenti dei vettori \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 e \mathbf{u}_3 rispetto alla base canonica. Risulta allora $S^{-1}BS = J$

Ma allora se $S^{-1}BS = R^{-1}AR$, si ha che

$$B = SR^{-1}ARS^{-1} = (RS^{-1})^{-1}A(RS^{-1}).$$

Dunque una matrice M come quella cercata è, ad esempio, RS^{-1} .

Esistono infinite matrici M tali che $B = M^{-1}AM$. Infatti se M è una di tali matrici (ad esempio la matrice RS^{-1} appena determinata) consideriamo una matrice N del tipo $N = \alpha M$, dove α è un qualsiasi numero reale non nullo. Ora $N^{-1} = \alpha^{-1}M^{-1}$, e, pertanto

$$N^{-1}AN = (\alpha^{-1}M^{-1})A(\alpha M) = \alpha^{-1}\alpha M^{-1}AM = M^{-1}AM = B$$

Notiamo che le matrici che abbiamo così ottenuto non sono tutte le possibili matrici che trasformano A in B .