

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
PROVA SCRITTA DEL 26 GENNAIO 1999
Tempo assegnato: 2 ore e 30 minuti

PRIMO ESERCIZIO [7 punti]

Si consideri il sottoinsieme di \mathbf{N}^2 :

$$A = \{(x, y) \mid y = nx \text{ con } n = 1, 2, 3\}.$$

1. Verificare che A è numerabile.
2. Determinare una corrispondenza biunivoca $f : \mathbf{N} \rightarrow A$.
N. B.: l'insieme \mathbf{N} non comprende il numero 0.

SECONDO ESERCIZIO [8 punti]

1. Determinare, al variare del parametro k in \mathbf{Z}_5 , la cardinalità dell'insieme delle soluzioni del seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti nel campo \mathbf{Z}_5 nelle incognite x, y e z in \mathbf{Z}_5 :

$$\begin{cases} x + y & = [1]_5 \\ [2]_5 x + kz & = [2]_5 \\ kx + y & = [1]_5 \end{cases}$$

2. Fissato un valore del parametro k per cui il sistema ammette più di una soluzione, determinare esplicitamente tali soluzioni.

TERZO ESERCIZIO [8 punti]

Siano date le matrici a coefficienti reali:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & k & 0 \end{pmatrix}$$

dove k è un parametro reale.

1. Determinare i valori di k per i quali le matrici A e B sono simili.
2. Fissato a piacere uno di tali valori di k , determinare $M \in \text{GL}(3, \mathbf{R})$ tale che $A = M^{-1}BM$.

QUARTO ESERCIZIO [7 punti]

Si consideri la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calcolare e^A .
2. Calcolare il polinomio minimo di A .
3. Determinare l'insieme dei polinomi $p(x)$ di grado uguale a 10 tali che $p(A) = 0$.

**ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
RISOLUZIONE DEL TEMA D'ESAME DEL 26 GENNAIO 1999**

PRIMO ESERCIZIO

1. A è un sottoinsieme di \mathbf{N}^2 che ha la cardinalità del numerabile e, pertanto, $|A| \leq \aleph_0$. D'altra parte, l'applicazione g da \mathbf{N} in A definita da $g(x) = (x, x)$ è chiaramente iniettiva: dunque $|\mathbf{N}| \leq |A|$. In conclusione $|A| = \aleph_0$.
2. Per ogni intero positivo x fissato esistono esattamente tre elementi di A aventi x come prima componente: precisamente (x, x) , $(x, 2x)$ e $(x, 3x)$. Possiamo dunque innanzitutto enumerare gli elementi di A la cui prima componente è 1, poi quelli la cui prima componente è 2 e così via. Definiamo allora f nel modo seguente:

$$f(n) := \begin{cases} (x, x) & \text{se } n = 3x - 2 \\ (x, 2x) & \text{se } n = 3x - 1 \\ (x, 3x) & \text{se } n = 3x \end{cases}$$

SECONDO ESERCIZIO

1. La matrice dei coefficienti del sistema è:

$$A = \begin{pmatrix} [1]_5 & [1]_5 & [0]_5 \\ [2]_5 & [0]_5 & k \\ k & [1]_5 & [0]_5 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è $k(k - [1]_5)$. Dunque per $k \neq [0]_5$, $k \neq [1]_5$ il sistema è Crameriano e, pertanto, ammette un'unica soluzione, ovvero l'insieme delle soluzioni ha cardinalità 1. Per $k = [0]_5$ il rango della matrice del sistema è 2 (ad esempio il minore formato dalle prime due righe e colonne di A ha determinante non nullo). La matrice completa del sistema in questo caso è:

$$A' = \begin{pmatrix} [1]_5 & [1]_5 & [0]_5 & [1]_5 \\ [2]_5 & [0]_5 & [0]_5 & [2]_5 \\ [0]_5 & [1]_5 & [0]_5 & [1]_5 \end{pmatrix}$$

Per calcolare il rango di questa matrice è sufficiente calcolare il determinante del minore formato dalla prima, seconda e quarta colonna (infatti la terza colonna è nulla). Ora:

$$\det \begin{pmatrix} [1]_5 & [1]_5 & [1]_5 \\ [2]_5 & [0]_5 & [2]_5 \\ [0]_5 & [1]_5 & [1]_5 \end{pmatrix} = [3]_5$$

Dunque $\text{rk } A' = 3 \neq \text{rk } A$. Pertanto, per il teorema di Rouché-Capelli il sistema non ha soluzioni, ovvero la cardinalità dell'insieme delle soluzioni è 0. Rimane

da considerare il caso $k = [1]_5$. In tal caso la matrice del sistema ha rango 2 (ad esempio il minore formato dalle prime due righe e colonne di A ha determinante non nullo). La matrice completa del sistema in questo caso è

$$A' = \begin{pmatrix} [1]_5 & [1]_5 & [0]_5 & [1]_5 \\ [2]_5 & [0]_5 & [1]_5 & [2]_5 \\ [1]_5 & [1]_5 & [0]_5 & [1]_5 \end{pmatrix}$$

Si vede subito che anche questa matrice ha rango 2: infatti ha la prima e l'ultima riga uguali. Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema in questo caso è risolubile e le soluzioni dipendono da 1 (numero delle incognite meno rango del sistema) parametro variabile in \mathbf{Z}_5 . Dunque l'insieme delle soluzioni ha cardinalità 5.

2. Dai risultati del punto 1 sappiamo che l'unico valore di k per cui il sistema ha più di una soluzione è $[1]_5$. In tal caso il sistema si riduce a:

$$\begin{cases} x + y & = [1]_5 \\ [2]_5 x + z & = [2]_5 \end{cases}$$

(osserviamo che è sufficiente considerare un numero di equazioni indipendenti uguale al rango della matrice del sistema). Ora possiamo risolvere molto semplicemente il sistema, esprimendo, ad esempio, y e z in termini di x . Dunque le soluzioni del sistema sono le seguenti:

$$\begin{cases} x & = t \\ y & = [1]_5 - t \\ z & = [2]_5 - [2]_5 t \end{cases}$$

al variare di t in \mathbf{Z}_5 .

TERZO ESERCIZIO

1. Osserviamo innanzitutto che A è una matrice triangolare: dunque i suoi autovalori sono gli elementi che compaiono lungo la diagonale contati con le opportune molteplicità. Pertanto A ha come autovalori 0 con molteplicità algebrica 2 e 2 con molteplicità algebrica 1. La molteplicità geometrica di 0, che dà il numero di blocchi di Jordan relativi a 0 nella forma canonica di Jordan di A , è:

$$\text{mg}_A(0) = 3 - \text{rk}(A - 0 \cdot I) = 3 - \text{rk} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

Dunque la forma canonica di Jordan di A contiene un unico blocco relativo all'autovalore 0, di dimensione uguale a 2, cioè la molteplicità algebrica di 0. Poiché l'autovalore 2 ha molteplicità algebrica 1 la forma canonica di Jordan di A contiene un unico blocco di dimensione 1 relativo all'autovalore 2. Pertanto la forma canonica di Jordan di A è la seguente:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora il polinomio caratteristico della matrice B . Si ha:

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & k & -\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^2 - \lambda^3 = -\lambda^2(-2 + \lambda).$$

Dunque B ha gli stessi autovalori di A con le stesse molteplicità algebriche. Utilizzando le stesse tecniche adottate per determinare la forma canonica di Jordan della matrice A , vediamo che la forma canonica di Jordan di B contiene un blocco di Jordan relativo all'autovalore 2 di dimensione 1 e un numero di blocchi di Jordan relativi all'autovalore 0 uguale a

$$\text{mg}_B(0) = 3 - \text{rk}(B - 0 \cdot I) = 3 - \text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & k & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque la forma canonica di Jordan di B contiene un unico blocco di Jordan relativo all'autovalore 0, e, in particolare è la stessa, a meno di scambi nell'ordine dei blocchi, di quella di A , se e solo se $k \neq 2$. Poiché due matrici reali sono simili se e solo se hanno, a meno di scambi di blocchi, la stessa forma canonica di Jordan (eventualmente complessa) possiamo concludere che A e B sono simili se e solo se $k \neq 2$.

2. Sia $k \neq 2$. Determiniamo una matrice di passaggio da A a J : per far ciò determiniamo un autovettore \mathbf{v}_1 di A relativo all'autovalore 2. Se $\mathbf{v}_1 = (x, y, z)$ deve essere $(A - 2I)^t \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ ovvero:

$$\begin{cases} -2x + 2y + 3z = 0 \\ \quad - 2y + z = 0 \\ \quad \quad 0 = 0 \end{cases}$$

che, risolto, dà $x = 4y$, $z = 2y$. Possiamo ad esempio porre $\mathbf{v}_1 = (4, 1, 2)$. Consideriamo ora l'altro autovalore $\lambda_2 = 0$: sia θ l'endomorfismo di \mathbf{R}^3 la cui matrice rispetto alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ di \mathbf{R}^3 sia A . Determiniamo le immagini dei vettori della base canonica tramite le potenze successive di θ (dobbiamo proseguire fino all'indice di 0, cioè 2):

$$\begin{array}{lll} \mathbf{e}_1 & \rightarrow & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 & \rightarrow & 2\mathbf{e}_1 \quad \rightarrow \quad \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_3 & \rightarrow & 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \quad \rightarrow \quad 8\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 \end{array}$$

Consideriamo allora la seguente successione dei nuclei (sulla prima riga della tabella abbiamo riportato le loro dimensioni) e le seguenti catene di autovettori generalizzati:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & < & 1 & < & 2 \\ \{\mathbf{0}\} & \subset & \ker \theta & \subset & \ker \theta^2 \\ \mathbf{0} & \leftarrow & \mathbf{v}_2 & \leftarrow & \mathbf{v}_3 \end{array}$$

Occorre allora scegliere \mathbf{v}_3 in $\ker \theta^2 - \ker \theta$: ad esempio scegliamo $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_2$. Determiniamo così $\mathbf{v}_2 = \theta(\mathbf{v}_3) = 2\mathbf{e}_1$. Consideriamo ora la matrice:

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono, rispettivamente, le componenti dei vettori \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 rispetto alla base canonica. Risulta allora $R^{-1}AR = J$. Ripetiamo ora un analogo procedimento per B : determiniamo un autovettore \mathbf{u}_1 di B relativo all'autovalore 2. Se $\mathbf{u}_1 = (x, y, z)$ deve essere $(B - 2I)^t \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ ovvero

$$\begin{cases} -x + y & = 0 \\ x - y & = 0 \\ 2x + ky - 2z & = 0 \end{cases}$$

che, risolto, dà $x = y$, $z = \frac{k+2}{2}y$. Possiamo ad esempio porre $\mathbf{u}_1 = (2, 2, k+2)$. Consideriamo ora l'altro autovalore $\lambda_2 = 0$: sia η l'endomorfismo di \mathbf{R}^3 la cui matrice rispetto alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ di \mathbf{R}^3 sia B . Determiniamo le immagini dei vettori della base canonica tramite le potenze successive di η (dobbiamo proseguire fino all'indice di 0, cioè 2):

$$\begin{array}{llll} \mathbf{e}_1 & \rightarrow & \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 & \rightarrow & 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + (2+k)\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 & \rightarrow & \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + k\mathbf{e}_3 & \rightarrow & 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + (2+k)\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 & \rightarrow & \mathbf{0} & & \end{array}$$

Consideriamo allora la seguente successione dei nuclei (sulla prima riga della tabella abbiamo riportato le loro dimensioni) e le seguenti catene di autovettori generalizzati:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & < & 1 & < & 2 \\ \{\mathbf{0}\} & \subset & \ker \eta & \subset & \ker \eta^2 \\ \mathbf{0} & \leftarrow & \mathbf{u}_2 & \leftarrow & \mathbf{u}_3 \end{array}$$

Occorre allora scegliere \mathbf{u}_3 in $\ker \eta^2 - \ker \eta$: ad esempio scegliamo $\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. Determiniamo così $\mathbf{u}_2 = \eta(\mathbf{u}_3) = (2-k)\mathbf{e}_3$. Pertanto se consideriamo la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2+k & 2-k & 0 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono, rispettivamente, le componenti dei vettori \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 e \mathbf{u}_3 rispetto alla base canonica, risulta $S^{-1}BS = J$. Dunque $S^{-1}BS = R^{-1}AR$. Moltiplicando entrambi i membri di questa identità a destra per S e a sinistra per S^{-1} otteniamo $B = SR^{-1}ARS^{-1}$. Possiamo allora porre $M = RS^{-1}$, da cui otteniamo $B = M^{-1}AM$.

QUARTO ESERCIZIO

Osserviamo innanzitutto che A è una matrice triangolare i cui autovalori sono gli elementi lungo la diagonale principale contati con le opportune molteplicità. Dunque A ha come unico autovalore 1 di molteplicità algebrica 3. Vogliamo ora calcolare l'indice dell'autovalore 1. Se f è un endomorfismo di \mathbf{R}^3 che rispetto ad una qualche base si rappresenta con la matrice $A - I$, allora sappiamo che la successione di interi $\dim \operatorname{Im} f$, $\dim \operatorname{Im} f^2$, $\dim \operatorname{Im} f^3$, ... è strettamente decrescente fino al passo i -esimo dove i è l'indice dell'autovalore 1, dal passo i -esimo in poi la successione si stabilizza e assume sempre il valore 3 - ma $(1) = 0$. Poiché $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rk}(A - I) = 1$, ne consegue immediatamente che $\dim \operatorname{Im} f^2 = 0$

e che l'indice di 1 è 2. Pertanto il polinomio minimo di A è $(x - 1)^2$. Questo risponde al quesito **2**.

Per quanto riguarda il quesito **1** sappiamo che la funzione esponenziale, essendo derivabile infinite volte su tutto \mathbf{R} , è chiaramente definita sullo spettro di A . Esiste inoltre un polinomio $p(x)$ di grado minore del grado del polinomio minimo di A che coincide con l'esponenziale sullo spettro di A , e per definizione, si ha $e^A = p(A)$. Se $p(x) = a + bx$ è un tale polinomio ciò può essere espresso dicendo che $p(1) = \exp(1) = e$, e $p'(1) = \exp'(1) = \exp(1) = e$. Derivando $p(x)$ si trova $p'(x) = b$. Valutando $p(1)$ e $p'(1)$ troviamo le seguenti equazioni $a + b = e$, $b = e$, da cui deduciamo che $p(x) = ex$. Dunque $e^A = p(A) = eA$, ovvero:

$$e^A = \begin{pmatrix} e & 2e & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}.$$

Infine, per determinare tutti i polinomi di grado 10 che si annullano in A , ricordiamo che i polinomi che si annullano in A sono tutti e soli i multipli del polinomio minimo di A , Pertanto i polinomi di grado 10 che si annullano in A sono tutti e soli i polinomi del tipo $(x - 1)^2 f(x)$ dove $f(x)$ è un polinomio di grado 8.