

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
PROVA SCRITTA DEL 26 ottobre 2000
Tempo assegnato: 2 ore e 30 minuti

PRIMO ESERCIZIO [8 punti]

Si determini la cardinalità del seguente sottoinsieme di $Z \times Z$:

$$A = \{(x, y) \mid x + 2y = 1, y > 0\}$$

Determinare inoltre, se esiste, una funzione biunivoca $f : N \longrightarrow A$.

SECONDO ESERCIZIO [8 punti]

Si consideri la matrice a coefficienti reali:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove k è un parametro reale.

1. Si determini per quali valori di k la matrice A_k è simile a una matrice di Jordan reale;
2. Scelto un valore di h per cui A_h è simile a una matrice di Jordan reale, si determini una matrice di Jordan J e una matrice $M \in GL(3, \mathbb{R})$ tali che $J = M^{-1}A_hM$.
3. Si determini, se esiste, la matrice $\log(A_h)$.
4. Si determini una funzione f reale a valori reali per la quale non esiste $f(A)$.

TERZO ESERCIZIO [7 punti]

Si determinino tutti i numeri naturali n per i quali l'insieme degli omomorfismi dal gruppo $(Z_n, +)$ al gruppo $(Z_{12}, +)$ non sia composto dal solo omomorfismo nullo.

Scelto uno di tali omomorfismi se ne determini il nucleo e l'immagine.

QUARTO ESERCIZIO [7 punti]

Si discuta e risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in \mathbb{Z}_{13} :

$$\begin{cases} [1]_{13}x + [1]_{13}y + [1]_{13}z &= [1]_{13} \\ [2]_{13}x + [1]_{13}y + [1]_{13}z &= [1]_{13} \\ [10]_{13}x + [11]_{13}y + [11]_{13}z &= [1]_{13} \end{cases}$$