

**ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
PROVA SCRITTA DEL 7 GIUGNO 2000
Tempo assegnato: 2 ore e 30 minuti**

PRIMO ESERCIZIO [7 punti]

1. Determinare la cardinalità del sottoinsieme $A = \{(x, y, z) \mid z \leq y, x = 2y\}$ di \mathbb{N}^3 .
2. Nel caso in cui A abbia cardinalità \aleph_0 determinare una corrispondenza biunivoca tra \mathbb{N} e A ; nel caso in cui A abbia cardinalità finita n determinare una corrispondenza biunivoca tra $\{1, 2, \dots, n\}$ e A .

N. B.: l'insieme \mathbb{N} non comprende il numero 0.

SECONDO ESERCIZIO [8 punti]

Dati i parametri reali h e k si considerino le matrici di $M(2, \mathbb{R})$:

$$A(h, k) := \begin{pmatrix} h-k & -k \\ 2k & h+k \end{pmatrix} \quad B(h, k) := \begin{pmatrix} h-k & -k \\ k & h+k \end{pmatrix}.$$

Per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di $GL(2, \mathbb{R})$ si dica se è un gruppo rispetto al prodotto righe per colonne. In caso affermativo dire se è un gruppo abeliano.

1. $G := \{A(h, k) \mid h, k \text{ non entrambi nulli}\};$
2. $H := \{B(h, k) \mid h \neq 0\};$
3. $L := \{B(h, k) \mid h > 0, k \geq 0\}.$

TERZO ESERCIZIO [7 punti]

Si consideri l'insieme $M(5, \mathbb{R})$ delle matrici quadrate di ordine 5 a coefficienti reali.

1. Si determinino tutte le classi di equivalenza (rispetto alla relazione di similitudine tra matrici) formate da matrici aventi $-(1-x)^2 x^3$ come polinomio caratteristico, individuando un rappresentante per ciascuna classe.
2. Si determini il polinomio minimo per ciascuna delle matrici contenute nelle classi determinate al punto precedente.
3. Si stabilisca se esistono funzioni reali di variabile reale definite su qualcuna ma non su tutte le matrici determinate precedentemente. In caso affermativo indicare una di tali funzioni specificando su quali matrici è definita e su quali no.

QUARTO ESERCIZIO [8 punti]

Siano date le matrici a coefficienti reali:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 2k \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dove k è un parametro reale.

1. Si stabilisca per quali valori del parametro k le due matrici sono simili.
2. Fissato a piacere un valore di k per cui A e B_k sono simili determinare $M \in \text{GL}(3, \mathbb{R})$ tale che $A = M^{-1}B_kM$.

**ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
RISOLUZIONE DEL TEMA D'ESAME DEL 7 GIUGNO 2000**

PRIMO ESERCIZIO

1. L'insieme A contiene gli infiniti elementi del tipo $(2y, y, y)$ dove y varia in \mathbb{N} . Dunque A è un sottoinsieme infinito di \mathbb{N}^3 , che è un insieme numerabile, ed è pertanto numerabile.
2. Per ogni $y \in \mathbb{N}$ esistono esattamente y elementi di A del tipo (x, y, z) : infatti fissato y , risulta automaticamente fissato x uguale a $2y$, mentre z può variare tra 1 e y . Allora possiamo esprimere A come unione disgiunta dei sottoinsiemi $A_y := \{(2y, y, z) \mid z \leq y\}$ al variare di y in \mathbb{N} . È possibile allora enumerare gli elementi di A elencando prima gli elementi di A_1 poi quelli di A_2 e così via, enumerando gli elementi di ciascun insieme A_y rispetto alla sua terza coordinata crescente. In questa enumerazione allora l'elemento $(2y, y, z)$ è preceduto dagli elementi di $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{y-1}$ (che sono in numero di $1 + 2 + \dots + (y-1) = \frac{y(y-1)}{2}$) e dagli elementi $(2y, y, z')$ con $z' < z$ (che, sono in numero di $z-1$). Complessivamente $(2y, y, z')$ è preceduto da $\frac{y(y-1)}{2} + z - 1$ elementi. Pertanto l'applicazione $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ definita da:

$$f(2y, y, z) = \frac{y(y-1)}{2} + z$$

è una corrispondenza biunivoca.

SECONDO ESERCIZIO

Gli insiemi G , H e L sono sottoinsiemi del gruppo $GL(2, \mathbb{R})$: pertanto, per determinare se sono gruppi rispetto all'operazione assegnata è sufficiente verificare se sono non vuoti, chiusi rispetto al prodotto e se contengono l'inverso di ciascun proprio elemento.

1. Osserviamo innanzitutto che poiché $\det A(h, k) = h^2 + k^2$, si ha che $A(h, k)$ è invertibile se e solo se h e k non sono entrambi nulli. In particolare G è non vuoto perché basta assegnare a h e k valori arbitrari purché non entrambi nulli per ottenere una matrice $A(h, k)$ di G . Verifichiamo se G è chiuso rispetto al prodotto: consideriamo due matrici $A(h, k)$ e $A(h', k')$ di G e calcoliamone il prodotto:

$$\begin{aligned} A(h, k) A(h', k') &= \begin{pmatrix} hh' - kk' - hk' - kh' & -hk' - kh' \\ 2hk' + 2kh' & hh' - kk' + hk' + kh' \end{pmatrix} \\ &= A(hh' - kk', hk' + kh'). \end{aligned}$$

La condizione che $hh' - kk'$ e $hk' + kh'$ non siano entrambi nulli è automaticamente soddisfatta perché, altrimenti, il prodotto $A(h, k) A(h', k')$ sarebbe la matrice nulla, il che è impossibile perché $A(h, k)$ e $A(h', k')$ sono matrici di $GL(2, \mathbb{R})$. Dunque $A(h, k) A(h', k') \in G$, che è così chiuso rispetto al prodotto.

Verifichiamo ora se, data una matrice $A(h, k) \in G$, anche $A(h, k)^{-1}$ appartiene a G . Calcoliamo allora l'inversa di $A(h, k)$:

$$A(h, k)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{h}{h^2+k^2} + \frac{k}{h^2+k^2} & \frac{k}{h^2+k^2} \\ -2\frac{k}{h^2+k^2} & \frac{h}{h^2+k^2} - \frac{k}{h^2+k^2} \end{pmatrix} = A\left(\frac{h}{h^2+k^2}, -\frac{k}{h^2+k^2}\right).$$

Anche qui, la condizione che $\frac{h}{h^2+k^2}$ e $-\frac{k}{h^2+k^2}$ non siano entrambi nulli è automaticamente soddisfatta perché altrimenti $A(h, k)^{-1}$ sarebbe la matrice nulla, il che non può essere perché la matrice nulla non è invertibile. Dunque $A(h, k)^{-1}$ appartiene a G , che è, pertanto un gruppo. Infine $A(h', k') A(h, k) = A(h'h - k'k, h'k + k'h)$, ovvero $A(h, k) A(h', k') = A(h', k') A(h, k)$: pertanto G è abeliano.

2. Analogamente la caso precedente osserviamo innanzitutto che $\det B(h, k) = h^2$, e, dunque, $B(h, k)$ è invertibile se e solo se $h \neq 0$. In particolare H è non vuoto perché basta assegnare a h e k valori arbitrari con $h \neq 0$ per ottenere una matrice $B(h, k)$ di H . Consideriamo due matrici $B(h, k)$ e $B(h', k')$ di H e calcoliamone il prodotto:

$$B(h, k) B(h', k') = \begin{pmatrix} hh' - kh' - hk' & -kh' - hk' \\ kh' + hk' & hh' + kh' + hk' \end{pmatrix} = B(hh', kh' + hk').$$

Poiché h e h' sono non nulli anche $hh' \neq 0$: dunque $B(h, k) B(h', k') \in H$, che è così chiuso rispetto al prodotto. Sia ora $B(h, k) \in H$ e calcoliamo l'inversa di $B(h, k)$:

$$B(h, k)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} + \frac{k}{h^2} & \frac{k}{h^2} \\ -\frac{k}{h^2} & \frac{1}{h} - \frac{k}{h^2} \end{pmatrix} = B\left(\frac{1}{h}, -\frac{k}{h^2}\right).$$

Chiaramente $\frac{1}{h} \neq 0$, cosicché $B(h, k)^{-1} \in H$: possiamo allora concludere che H è un gruppo. Infine $B(h, k) B(h', k') = B(hh', kh' + hk')$ e $B(h', k') B(h, k) = B(h'h, k'h + h'k)$, ovvero $B(h, k) B(h', k') = B(h', k') B(h, k)$, e, pertanto, H è un gruppo abeliano.

3. L'insieme L è contenuto in H : possiamo allora sfruttare i calcoli effettuati al punto precedente. Chiaramente L è non vuoto. Se $B(h, k)$ e $B(h', k')$ appartengono a L , allora il loro prodotto $B(hh', kh' + hk')$ appartiene anch'esso a L dal momento che le condizioni su h, k, h', k' implicano che $hh' > 0$ e $kh' + hk' \geq 0$. Dunque L è chiuso rispetto al prodotto. Invece se $B(h, k)$ è una matrice di L , la sua inversa $B(\frac{1}{h}, -\frac{k}{h^2})$ non è detto che appartenga a L , perché se $k > 0$ allora $-\frac{k}{h^2} < 0$ e, dunque, $B(\frac{1}{h}, -\frac{k}{h^2}) \notin L$.

TERZO ESERCIZIO

4. Le matrici considerate hanno polinomio caratteristico totalmente riducibile e sono, pertanto, Jordanizzabili. In particolare possiamo rappresentare le classi cercate con matrici di Jordan con autovalore 1 di molteplicità algebrica 2 e autovalore 0 di molteplicità algebrica 3. Per quanto riguarda l'autovalore 1 abbiamo 2 possibilità: o ci sono 2 blocchi di ordine 1 o c'è un unico blocco di ordine 2. Relativamente all'autovalore 0 abbiamo invece 3 diverse possibilità:

o ci sono 3 blocchi di ordine 1, o un blocco di ordine 2 e uno di ordine 1, o un unico blocco di ordine 3. Combinando queste possibilità vediamo allora che esistono 6 classi di equivalenza di matrici con polinomio caratteristico uguale a $-(1-x)^2 x^3$ e tali classi si possono rappresentare rispettivamente con le matrici di Jordan:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & J_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 J_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & J_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 J_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & J_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

5. Tutte le matrici contenute in una classe di equivalenza hanno lo stesso polinomio minimo: è dunque sufficiente calcolare il polinomio minimo per le matrici di Jordan determinate al punto precedente. Il polinomio minimo di una matrice di Jordan è $(x - \lambda_1)^{i_1} (x - \lambda_2)^{i_2} \cdots (x - \lambda_r)^{i_r}$ dove $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sono gli autovalori della matrice e i_1, i_2, \dots, i_r sono i rispettivi indici. Ricordando che l'indice di un autovalore di una matrice di Jordan può essere interpretato come la dimensione del massimo blocco di Jordan relativo a quell'autovalore vediamo allora che i polinomi minimi di J_1, J_2, \dots, J_6 sono, rispettivamente, $(x-1)x$, $(x-1)x^2$, $(x-1)x^3$, $(x-1)^2 x$, $(x-1)^2 x^2$, $(x-1)^2 x^3$.
6. Per definizione, una funzione reale f di variabile reale è definita su una matrice Jordanizzabile A se e solo se, per ciascun autovalore λ di A , f è definita in λ insieme alle sue derivate successive di ordine fino a $i-1$, con i indice dell'autovalore λ . In particolare, per stabilire se una funzione è definita sulle matrici di Jordan determinate al punto 1, occorre studiare il comportamento della funzione in 0 e 1. Osserviamo allora che la condizione che una funzione f sia definita su J_6 può esprimersi dicendo che sono definiti i valori $f(1)$, $f'(1)$, $f(0)$, $f'(0)$ e $f''(0)$, e, il verificarsi di queste condizioni implica che f sia definita su tutte le altre matrici J_i . Viceversa, affinché f sia definita su J_1 è sufficiente che f sia definita in 0 e in 1, e queste condizioni non sono sufficienti per assicurare che f sia definita sulle altre matrici J_i . Consideriamo ad esempio la funzione abs che associa a un numero reale x il suo valore assoluto. La funzione abs è definita per ogni numero reale (in particolare per 0 e 1). Inoltre abs non è derivabile in 0, ma è derivabile infinite volte in ogni punto diverso da 0 (in particolare in 1). Dunque abs è definita su una matrice Jordanizzabile A , purché 0 non sia

autovalore di A , oppure 0 sia autovalore di A di indice 1. In particolare abs è definita su J_1, J_2 e J_3 , ma non è definita su J_4, J_5 e J_6 .

QUARTO ESERCIZIO

1. Due matrici a coefficienti reali sono simili se e solo se hanno la stessa forma canonica di Jordan (eventualmente complessa) a meno di scambi di blocchi. Cominciamo allora con il calcolare il polinomio caratteristico di entrambe le matrici. Si ha:

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = -\lambda(1 - \lambda)^2, \\ f_{B_k}(\lambda) &= \det(B_k - \lambda I) = -\lambda(1 - \lambda)^2. \end{aligned}$$

Dunque entrambe le matrici hanno come autovalore 0 di molteplicità algebrica 1 e autovalore 1 di molteplicità algebrica 2. La forma canonica di Jordan di entrambe contiene allora un blocco di Jordan di autovalore 0 e di dimensione 1, e blocchi di Jordan di autovalore 1 e di dimensione complessiva 2. Per determinare quanti blocchi di Jordan di autovalore 1 contiene la forma canonica di Jordan di ciascuna matrice calcoliamo allora la molteplicità geometrica di 1 relativamente a entrambe le matrici. Si ha:

$$\begin{aligned} \text{mg}_A(1) &= 3 - \text{rk}(A - I) = 1, \\ \text{mg}_{B_k}(1) &= 3 - \text{rk}(B_k - I) = \begin{cases} 1 & \text{se } k \neq 0 \\ 2 & \text{se } k = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Se $\text{mg}_A(1) = \text{mg}_{B_k}(1)$, ovvero se $k \neq 0$, la forma canonica di Jordan sia di A che di B_k contiene un unico blocco di Jordan di autovalore 1 e di dimensione 2. Pertanto la forma canonica di Jordan di A e quella di B_k coincidono, a meno di scambi di blocchi, se e solo se $k \neq 0$, ovvero A è simile a B_k se e solo se $k \neq 0$.

2. Sappiamo, dalla discussione del punto precedente, che tanto A quanto B_k , per $k \neq 0$ sono simili alla matrice di Jordan:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vogliamo allora determinare $R, S \in \text{GL}(3, \mathbb{R})$ tali che $J = R^{-1}AR = S^{-1}B_kS$. Determiniamo anzitutto un autovettore di A relativo all'autovalore 0, ovvero un vettore non nullo $\mathbf{v}_1 = (x, y, z)$ tale che

$$(A - 0I)^t \mathbf{v}_1 = 0$$

ovvero

$$\begin{cases} -3x + y = 0 \\ -4x - y = 0 \\ 4x + y = 0 \end{cases}$$

che risolto dà $x = y = 0$. Possiamo dunque porre $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 1)$. Consideriamo ora l'altro autovalore 1: sia η l'endomorfismo di \mathbb{R}^3 che rispetto alla base canonica si rappresenta con la matrice A , e sia $\eta_1 = \eta - I$. Determiniamo le immagini

dei vettori della base canonica tramite le potenze successive di η_1 (dobbiamo proseguire fino al passo corrispondente all'indice di 1, che sappiamo già essere 2):

$$\begin{array}{llll} \mathbf{e}_1 & \rightarrow & 2\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 & \rightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 & \rightarrow & \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 & \rightarrow \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 & \rightarrow & -\mathbf{e}_3 & \rightarrow \mathbf{e}_3 \end{array}$$

Consideriamo allora la seguente successione dei nuclei (sulla prima riga della tabella abbiamo riportato le loro dimensioni) e le seguenti catene di autovettori generalizzati:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & < & 1 & < & 2 \\ \{\mathbf{0}\} & \subset & \ker \eta_1 & \subset & \ker \eta_1^2 \\ \mathbf{0} & \leftarrow & \mathbf{v}_2 & \leftarrow & \mathbf{v}_3 \end{array}$$

Occorre allora scegliere \mathbf{v}_3 in $\ker \eta_1^2 - \ker \eta_1$: ad esempio scegliamo $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1$. Determiniamo così $\mathbf{v}_2 = \eta_1(\mathbf{v}_3) = 2\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$. Consideriamo ora la matrice

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono, rispettivamente, le componenti dei vettori \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 rispetto alla base canonica. Risulta allora $R^{-1}AR = J$.

Ripetiamo lo stesso procedimento per B_k : determiniamo anzitutto un autovettore relativo all'autovalore 0, ovvero un vettore non nullo $\mathbf{u}_1 = (x, y, z)$ tale che

$$\begin{cases} x + ky + 2kz = 0 \\ -y - 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

che risolto dà $x = 0$, $y = -2z$. Possiamo dunque porre $\mathbf{u}_1 = (0, -2, 1)$. Consideriamo ora l'altro autovalore 1: sia θ l'endomorfismo di \mathbb{R}^3 che rispetto alla base canonica si rappresenta con la matrice B_k , e sia $\theta_1 = \theta - I$. Determiniamo le immagini dei vettori della base canonica tramite le potenze successive di θ_1 (dobbiamo proseguire fino al passo corrispondente all'indice di 1, che sappiamo già essere 2):

$$\begin{array}{llll} \mathbf{e}_1 & \rightarrow & \mathbf{0} & \\ \mathbf{e}_2 & \rightarrow & k\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 & \rightarrow 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 & \rightarrow & 2k\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 & \rightarrow 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \end{array}$$

Consideriamo allora la seguente successione dei nuclei (sulla prima riga della tabella abbiamo riportato le loro dimensioni) e le seguenti catene di autovettori generalizzati:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & < & 1 & < & 2 \\ \{\mathbf{0}\} & \subset & \ker \theta_1 & \subset & \ker \theta_1^2 \\ \mathbf{0} & \leftarrow & \mathbf{u}_2 & \leftarrow & \mathbf{u}_3 \end{array}$$

Occorre allora scegliere \mathbf{u}_3 in $\ker \theta_1^2 - \ker \theta_1$: ad esempio scegliamo $\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$. Determiniamo così $\mathbf{u}_2 = \theta_1(\mathbf{u}_3) = -k\mathbf{e}_1$. Consideriamo ora la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono, rispettivamente, le componenti dei vettori \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 e \mathbf{u}_3 rispetto alla base canonica. Risulta allora $S^{-1}B_kS = J$.

Ora $R^{-1}AR = S^{-1}B_kS$. Moltiplicando a sinistra per R e a destra per R^{-1} entrambi i membri di questa relazione otteniamo $A = RS^{-1}B_kSR^{-1}$. Possiamo allora porre $M = SR^{-1}$ in modo tale che $A = M^{-1}B_kM$.