

**ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA**  
**INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)**  
**PROVA SCRITTA DEL 9 GIUGNO 1999**  
**Tempo assegnato: 2 ore e 30 minuti**

**PRIMO ESERCIZIO [7 punti]**

Si considerino i sottoinsiemi di  $\mathbf{R}^2$ :

$$A = \{(x, y) \mid xy = 1, x > 0\} \text{ e}$$
$$B = \{(x, y) \mid y = x^2, x > 0\}.$$

Dimostrare che  $A$  e  $B$  sono equipotenti e determinare una applicazione biunivoca  $f : A \rightarrow B$ .

**SECONDO ESERCIZIO [8 punti]**

Considerare l'insieme  $G$  delle matrici  $A \in M(3, \mathbf{R})$  del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

con  $a \neq 0$ .

1. Verificare che l'insieme  $G$  con l'operazione di moltiplicazione tra matrici è un gruppo.
2. Stabilire se il sottoinsieme  $H$  delle matrici di  $G$  tali che  $b = c$  è un sottogruppo di  $(G, \cdot)$ .
3. Stabilire se il sottoinsieme  $K$  delle matrici di  $G$  tali che  $b = 0$  è un sottogruppo di  $(G, \cdot)$ .
4. Stabilire se il sottoinsieme  $J$  delle matrici di  $G$  tali che  $c = 0$  è un sottogruppo di  $(G, \cdot)$ .

**TERZO ESERCIZIO [8 punti]**

Siano date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Stabilire se le matrici  $A$  e  $B$  sono simili in  $M(3, \mathbf{R})$  e se sono simili in  $M(3, \mathbf{C})$ .
2. Data la funzione  $f$  definita da  $f(x) = \sqrt{x+1}$ , calcolare, qualora siano definite,  $f(A)$  e  $f(B)$ .
3. Determinare, se esiste, una funzione  $g$  tale che sia definita  $g(A)$  e non sia definita  $g(B)$ .

4. Determinare, se esiste, una funzione  $h$  tale che non sia definita  $h(A)$  e sia definita  $h(B)$ .

**QUARTO ESERCIZIO [7 punti]**

Il quarto esercizio riguarda argomenti non facenti parte del programma dell'anno accademico 1999-2000.

**ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA**  
**INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)**  
**RISOLUZIONE DEL TEMA D'ESAME DEL 9 GIUGNO 1999**

**PRIMO ESERCIZIO**

Per ogni numero reale positivo  $x$  esiste uno e un solo numero reale  $y$  tale che  $(x, y) \in A$ : precisamente  $y = 1/x$ . Dunque  $A = \{(x, 1/x) \mid x > 0\}$ . Analogamente per ogni numero reale positivo  $x$  esiste uno e un solo numero reale  $y'$  tale che  $(x, y') \in B$ : precisamente  $y' = x^2$ . Pertanto  $B = \{(x, x^2) \mid x > 0\}$ . L'applicazione  $f: A \rightarrow B$  definita da  $f(x, 1/x) = (x, x^2)$  è pertanto biunivoca.

**SECONDO ESERCIZIO**

1. Notiamo innanzitutto che  $G$  è formato di matrici con determinante non nullo: dunque  $G$  è un sottoinsieme di  $GL(3, \mathbf{R})$ . Mostriamo allora che  $G$  è un sottogruppo di  $GL(3, \mathbf{R})$ . Osserviamo innanzitutto che l'insieme  $G$  è, ovviamente, non vuoto. Indichiamo ora con  $A(a, b, c)$  la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Verifichiamo ora che  $G$  è chiuso rispetto al prodotto: consideriamo due matrici

$$A(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad A(a', b', c') = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & a' \end{pmatrix}$$

di  $G$  e calcoliamone il prodotto:

$$\begin{aligned} A(a, b, c) A(a', b', c') &= \begin{pmatrix} aa' & ab' + ba' & ac' + bb' + ca' \\ 0 & aa' & ab' + ba' \\ 0 & 0 & aa' \end{pmatrix} = \\ &= A(aa', ab' + ba', ac' + bb' + ca'). \end{aligned}$$

Questa matrice appartiene a  $G$  (notiamo che  $aa' \neq 0$ ) e dunque  $G$  è chiuso rispetto al prodotto. Infine calcoliamo l'inversa della matrice  $A(a, b, c)$ :

$$A(a, b, c)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a^2} & \frac{b^2-ca}{a^3} \\ 0 & \frac{1}{a} & -\frac{b}{a^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} = A(a^{-1}, -ba^{-2}, b^2a^{-3} - ca^{-2}).$$

Poiché  $A^{-1}$  appartiene a  $G$  possiamo concludere che  $G$  è un gruppo rispetto al prodotto.

2. Il sottoinsieme  $H$  è ovviamente non vuoto: dai calcoli precedenti notiamo che  $A(a, b, b) A(a', b', b') = A(aa', ab' + ba', ab' + bb' + ba')$ : tale matrice appartiene a  $H$  se e solo se  $bb' = 0$ . Dunque scegliendo  $b \neq 0$  e  $b' \neq 0$  possiamo determinare due matrici  $A(a, b, b)$  e  $A(a', b', b')$  di  $H$  il cui prodotto non appartiene a  $H$ , che, dunque, non è un sottogruppo di  $G$ .

- Il sottoinsieme  $K$  è ovviamente non vuoto: dai calcoli precedenti notiamo che  $A(a, 0, c)A(a', 0, c') = A(aa', 0, ac' + ca')$  e  $A(a, 0, c)^{-1} = A(a^{-1}, 0, -ca^{-2})$ . Dunque  $K$  è chiuso rispetto al prodotto e contiene l'inversa di ogni sua matrice: in conclusione  $K$  è un sottogruppo di  $G$ .
- Il sottoinsieme  $J$  è ovviamente non vuoto: dai calcoli precedenti notiamo che  $A(a, b, 0)A(a', b', 0) = A(aa', ab' + ba', bb')$ : tale matrice appartiene a  $J$  se e solo se  $bb' = 0$ . Dunque scegliendo  $b \neq 0$  e  $b' \neq 0$  possiamo determinare due matrici  $A(a, b, 0)$  e  $A(a', b', 0)$  di  $J$  il cui prodotto non appartiene a  $J$ , che, dunque, non è un sottogruppo di  $G$ .

### TERZO ESERCIZIO

- Le matrici  $A$  e  $B$  sono triangolari e, pertanto, Jordanizzabili (sia come matrici reali che come matrici complesse). Gli autovalori di  $A$  e di  $B$  sono le entrate lungo la diagonale principale contate con le opportune molteplicità. Dunque, sia  $A$  che  $B$  hanno come unico autovalore 1 con molteplicità algebrica 3. Se calcoliamo ora la molteplicità geometrica di 1 rispetto alle due matrici troviamo  $\text{mg}_A(1) = 3 - \text{rk}(A - 1 \cdot I) = 1$  e  $\text{mg}_B(1) = 3 - \text{rk}(B - 1 \cdot I) = 2$ . Dunque le due matrici non sono simili né come matrici reali né come matrici complesse.
- Ricordiamo che la molteplicità geometrica di un autovalore di una matrice fornisce il numero di blocchi di Jordan relativi a quell'autovalore presenti nella forma canonica della matrice. Dunque la Jordanizzata di  $A$  è formata da un unico blocco di Jordan relativo all'autovalore 1: tale blocco avrà ovviamente dimensione 3, che pertanto è anche l'indice dell'autovalore. Il polinomio minimo di  $A$  è, dunque,  $(x - 1)^3$ . La Jordanizzata della matrice  $B$  è, invece, composta di due blocchi di Jordan: necessariamente tali blocchi avranno dimensioni rispettive 1 e 2, valore quest'ultimo che è l'indice dell'autovalore 1 rispetto alla matrice  $B$ . Il polinomio minimo di  $A$  è, pertanto,  $(x - 1)^2$ . Ora  $f$  è definita in  $A$  se e solo se sono definiti i valori  $f(1)$ ,  $f'(1)$  e  $f''(1)$ , mentre  $f$  è definita in  $B$  se e solo se sono definiti i valori  $f(1)$  e  $f'(1)$ . Calcolando la derivata prima e seconda di  $f$  si trova  $f'(x) = 1/(2\sqrt{x+1})$  e  $f''(x) = -1/(4\sqrt{x+1}^3)$ . Pertanto  $f(1) = \sqrt{2}$ ,  $f'(1) = \sqrt{2}/4$  e  $f''(1) = -\sqrt{2}/16$ . Dunque sia  $f(A)$  che  $f(B)$  sono definite. Per calcolare  $f(A)$  è necessario trovare un polinomio  $p(x)$  tale che  $p(1) = f(1)$ ,  $p'(1) = f'(1)$  e  $p''(1) = f''(1)$ , mentre per calcolare  $f(B)$  è necessario trovare un polinomio  $q(x)$  tale che  $q(1) = f(1)$  e  $q'(1) = f'(1)$ . Notiamo che una volta determinato  $p(x)$  possiamo scegliere  $q(x) = p(x)$ . Sappiamo che esiste  $p(x)$  siffatto di grado minore del grado del polinomio minimo di  $A$ . Cerchiamo dunque un polinomio  $p(x) = a + bx + cx^2$  che soddisfa le condizioni prima espresse. Si vede facilmente che  $p(1) = a + b + c$ ,  $p'(1) = b + 2c$  e  $p''(1) = 2c$ . Risolviamo allora il sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = \sqrt{2} \\ b + 2c = \sqrt{2}/4 \\ 2c = -\sqrt{2}/16 \end{cases}$$

e otteniamo  $a = \frac{23}{32}\sqrt{2}$ ,  $b = \frac{5}{16}\sqrt{2}$ ,  $c = -\frac{1}{32}\sqrt{2}$ . Dunque:

$$f(A) = \frac{23}{32}\sqrt{2}I + \frac{5}{16}\sqrt{2}A - \frac{\sqrt{2}}{32}A^2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{3}{8}\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

e

$$f(B) = \frac{23}{32}\sqrt{2}I + \frac{5}{16}\sqrt{2}B - \frac{\sqrt{2}}{32}B^2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

*Ovviamente per calcolare  $f(B)$  avremmo alternativamente potuto cercare un polinomio  $q(x)$  di grado minore di 2 (grado del polinomio minimo di ) tale che  $q(1) = f(1)$  e  $q'(1) = f'(1)$ .*

3. Abbiamo già osservato al punto precedente che richiedere che una funzione  $g$  sia definita in  $A$  è una condizione più forte che richiedere che sia definita in  $B$ . Dunque non esiste una funzione  $g$  come quella richiesta.
4. Una funzione  $h$  soddisfa le richieste se sono definite  $h(1)$  e  $h'(1)$  ma non  $h''(1)$ . Possiamo allora scegliere ad esempio  $h(x) = (x-1)^{3/2}$ .