

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
PROVA SCRITTA DEL 9 GIUGNO 1999
Tempo assegnato: 2 ore e 30 minuti

PRIMO ESERCIZIO [7 punti]

Si considerino i sottoinsiemi di \mathbf{R}^2 :

$$A = \{(x, y) \mid xy = 1, x > 0\} \text{ e}$$
$$B = \{(x, y) \mid y = x^2, x > 0\}.$$

Dimostrare che A e B sono equipotenti e determinare una applicazione biunivoca $f : A \rightarrow B$.

SECONDO ESERCIZIO [8 punti]

Considerare l'insieme G delle matrici $A \in M(3, \mathbf{R})$ del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

con $a \neq 0$.

1. Verificare che l'insieme G con l'operazione di moltiplicazione tra matrici è un gruppo.
2. Stabilire se il sottoinsieme H delle matrici di G tali che $b = c$ è un sottogruppo di (G, \cdot) .
3. Stabilire se il sottoinsieme K delle matrici di G tali che $b = 0$ è un sottogruppo di (G, \cdot) .
4. Stabilire se il sottoinsieme J delle matrici di G tali che $c = 0$ è un sottogruppo di (G, \cdot) .

TERZO ESERCIZIO [8 punti]

Siano date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Stabilire se le matrici A e B sono simili in $M(3, \mathbf{R})$ e se sono simili in $M(3, \mathbf{C})$.
2. Data la funzione f definita da $f(x) = \sqrt{x+1}$, calcolare, qualora siano definite, $f(A)$ e $f(B)$.
3. Determinare, se esiste, una funzione g tale che sia definita $g(A)$ e non sia definita $g(B)$.

4. Determinare, se esiste, una funzione h tale che non sia definita $h(A)$ e sia definita $h(B)$.

QUARTO ESERCIZIO [7 punti]

Il quarto esercizio riguarda argomenti non facenti parte del programma dell'anno accademico 1999-2000.

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA INFORMATICA (PROF. ACCASCINA)
RISOLUZIONE DEL TEMA D'ESAME DEL 9 GIUGNO 1999

PRIMO ESERCIZIO

Per ogni numero reale positivo x esiste uno e un solo numero reale y tale che $(x, y) \in A$: precisamente $y = 1/x$. Dunque $A = \{(x, 1/x) \mid x > 0\}$. Analogamente per ogni numero reale positivo x esiste uno e un solo numero reale y' tale che $(x, y') \in B$: precisamente $y' = x^2$. Pertanto $B = \{(x, x^2) \mid x > 0\}$. L'applicazione $f : A \rightarrow B$ definita da $f(x, 1/x) = (x, x^2)$ è pertanto biunivoca.

SECONDO ESERCIZIO

1. Notiamo innanzitutto che G è formato di matrici con determinante non nullo: dunque G è un sottoinsieme di $GL(3, \mathbf{R})$. Mostriamo allora che G è un sottogruppo di $GL(3, \mathbf{R})$. Osserviamo innanzitutto che l'insieme G è, ovviamente, non vuoto. Indichiamo ora con $A(a, b, c)$ la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Verifichiamo ora che G è chiuso rispetto al prodotto: consideriamo due matrici

$$A(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad A(a', b', c') = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & a' \end{pmatrix}$$

di G e calcoliamone il prodotto:

$$\begin{aligned} A(a, b, c) A(a', b', c') &= \begin{pmatrix} aa' & ab' + ba' & ac' + bb' + ca' \\ 0 & aa' & ab' + ba' \\ 0 & 0 & aa' \end{pmatrix} = \\ &= A(aa', ab' + ba', ac' + bb' + ca'). \end{aligned}$$

Questa matrice appartiene a G (notiamo che $aa' \neq 0$) e dunque G è chiuso rispetto al prodotto. Infine calcoliamo l'inversa della matrice $A(a, b, c)$:

$$A(a, b, c)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a^2} & \frac{b^2-ca}{a^3} \\ 0 & \frac{1}{a} & -\frac{b}{a^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} = A(a^{-1}, -ba^{-2}, b^2a^{-3} - ca^{-2}).$$

Poiché A^{-1} appartiene a G possiamo concludere che G è un gruppo rispetto al prodotto.

2. Il sottoinsieme H è ovviamente non vuoto: dai calcoli precedenti notiamo che $A(a, b, b) A(a', b', b') = A(aa', ab' + ba', ab' + bb' + ba')$: tale matrice appartiene a H se e solo se $bb' = 0$. Dunque scegliendo $b \neq 0$ e $b' \neq 0$ possiamo determinare due matrici $A(a, b, b)$ e $A(a', b', b')$ di H il cui prodotto non appartiene a H , che, dunque, non è un sottogruppo di G .

3. Il sottoinsieme K è ovviamente non vuoto: dai calcoli precedenti notiamo che $A(a, 0, c)A(a', 0, c') = A(aa', 0, ac' + ca')$ e $A(a, 0, c)^{-1} = A(a^{-1}, 0, -ca^{-2})$. Dunque K è chiuso rispetto al prodotto e contiene l'inversa di ogni sua matrice: in conclusione K è un sottogruppo di G .
4. Il sottoinsieme J è ovviamente non vuoto: dai calcoli precedenti notiamo che $A(a, b, 0)A(a', b', 0) = A(aa', ab' + ba', bb')$: tale matrice appartiene a J se e solo se $bb' = 0$. Dunque scegliendo $b \neq 0$ e $b' \neq 0$ possiamo determinare due matrici $A(a, b, 0)$ e $A(a', b', 0)$ di J il cui prodotto non appartiene a J , che, dunque, non è un sottogruppo di G .

TERZO ESERCIZIO

1. Le matrici A e B sono triangolari e, pertanto, Jordanizzabili (sia come matrici reali che come matrici complesse). Gli autovalori di A e di B sono le entrate lungo la diagonale principale contate con le opportune molteplicità. Dunque, sia A che B hanno come unico autovalore 1 con molteplicità algebrica 3. Se calcoliamo ora la molteplicità geometrica di 1 rispetto alle due matrici troviamo $\text{mg}_A(1) = 3 - \text{rk}(A - 1 \cdot I) = 1$ e $\text{mg}_B(1) = 3 - \text{rk}(B - 1 \cdot I) = 2$. Dunque le due matrici non sono simili né come matrici reali né come matrici complesse.
2. Ricordiamo che la molteplicità geometrica di un autovalore di una matrice fornisce il numero di blocchi di Jordan relativi a quell'autovalore presenti nella forma canonica della matrice. Dunque la Jordanizzata di A è formata da un unico blocco di Jordan relativo all'autovalore 1: tale blocco avrà ovviamente dimensione 3, che pertanto è anche l'indice dell'autovalore. Il polinomio minimo di A è, dunque, $(x - 1)^3$. La Jordanizzata della matrice B è, invece, composta di due blocchi di Jordan: necessariamente tali blocchi avranno dimensioni rispettive 1 e 2, valore quest'ultimo che è l'indice dell'autovalore 1 rispetto alla matrice B . Il polinomio minimo di A è, pertanto, $(x - 1)^2$. Ora f è definita in A se e solo se sono definiti i valori $f(1)$, $f'(1)$ e $f''(1)$, mentre f è definita in B se e solo se sono definiti i valori $f(1)$ e $f'(1)$. Calcolando la derivata prima e seconda di f si trova $f'(x) = 1/(2\sqrt{x+1})$ e $f''(x) = -1/(4\sqrt{x+1}^3)$. Pertanto $f(1) = \sqrt{2}$, $f'(1) = \sqrt{2}/4$ e $f''(1) = -\sqrt{2}/16$. Dunque sia $f(A)$ che $f(B)$ sono definite. Per calcolare $f(A)$ è necessario trovare un polinomio $p(x)$ tale che $p(1) = f(1)$, $p'(1) = f'(1)$ e $p''(1) = f''(1)$, mentre per calcolare $f(B)$ è necessario trovare un polinomio $q(x)$ tale che $q(1) = f(1)$ e $q'(1) = f'(1)$. Notiamo che una volta determinato $p(x)$ possiamo scegliere $q(x) = p(x)$. Sappiamo che esiste $p(x)$ siffatto di grado minore del grado del polinomio minimo di A . Cerchiamo dunque un polinomio $p(x) = a + bx + cx^2$ che soddisfa le condizioni prima esposte. Si vede facilmente che $p(1) = a + b + c$, $p'(1) = b + 2c$ e $p''(1) = 2c$. Risolviamo allora il sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = \sqrt{2} \\ b + 2c = \sqrt{2}/4 \\ 2c = -\sqrt{2}/16 \end{cases}$$

e otteniamo $a = a = \frac{23}{32}\sqrt{2}$, $b = \frac{5}{16}\sqrt{2}$, $c = -\frac{1}{32}\sqrt{2}$. Dunque:

$$f(A) = \frac{23}{32}\sqrt{2}I + \frac{5}{16}\sqrt{2}A - \frac{\sqrt{2}}{32}A^2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{3}{8}\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

e

$$f(B) = \frac{23}{32}\sqrt{2}I + \frac{5}{16}\sqrt{2}B - \frac{\sqrt{2}}{32}B^2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Ovviamente per calcolare $f(B)$ avremmo alternativamente potuto cercare un polinomio $q(x)$ di grado minore di 2 (grado del polinomio minimo di) tale che $q(1) = f(1)$ e $q'(1) = f'(1)$.

3. Abbiamo già osservato al punto precedente che richiedere che una funzione g sia definita in A è una condizione più forte che richiedere che sia definita in B . Dunque non esiste una funzione g come quella richiesta.
4. Una funzione h soddisfa le richiesta se sono definite $h(1)$ e $h'(1)$ ma non $h''(1)$. Possiamo allora scegliere ad esempio $h(x) = (x-1)^{3/2}$.