

## Capitolo 5

# Spazi vettoriali

### 5.1 Spazi vettoriali e basi

Nel corso di Geometria I sono stati studiati gli spazi vettoriali su un campo  $K$  (o, almeno sul campo  $R$  dei numeri reali). Qui richiamiamo velocemente alcuni argomenti necessari per un approfondimento dell'argomento. Rimanderemo ai due testi utilizzati negli anni scorsi nei corsi di Geometria per il Corso di Laurea in Ingegneria Informatica dell'Università "La Sapienza" di Roma:

[A.V.] Accascina, Villani *Algebra lineare* Edizioni Tecnico Scientifiche, Pisa

[V.C.P.] Vaccaro, Carfagna, Piccolella *Lezioni di geometria e algebra lineare* Masson, Milano.

**Definizione 668** Definizione di **spazio vettoriale** su un campo  $K$  (vedere [A.V.] Capitolo 2, definizione 7.6) oppure [V.C.P.] Capitolo 2, definizione 1.1.)

**Nota 669** In queste note i vettori vengono indicati in grassetto. Ad esempio, fissato uno spazio vettoriale  $V$  su un campo  $K$ , con il simbolo  $\mathbf{0}$  indichiamo il vettore nullo di  $V$ . Quindi  $\mathbf{0} \in V$ . Gli scalari vengono indicati in tondo, cioè con caratteri normali. Per esempio, con il simbolo  $0$  indichiamo l'elemento neutro rispetto all'addizione in  $K$ . Quindi  $0 \in K$ .

**Teorema 670** Dato uno spazio vettoriale  $V$  su un campo  $K$  si ha:

- 1)  $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$  per ogni  $a \in K$
- 2)  $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$
- 3)  $(-a)\mathbf{v} = -a\mathbf{v}$  per ogni  $a \in K$ , per ogni  $\mathbf{v} \in V$
- 4) Se  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  e se  $a\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , allora  $a = 0$

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio. Oppure vedere [A.V.] Capitolo 2, teorema 7.9. o [V.C.P.] capitolo 2, teoremi 1.12 e 1.13.  $\square$

**Definizione 671** Definizioni di **combinazione lineare** di vettori di uno spazio vettoriale, di **vettori linearmente indipendenti** e di **vettori linearmente**

**dipendenti.** (Vedere [A.V.] Capitolo 2, definizione 7.10 oppure [V.C.P.] capitolo 2, definizioni 3.1. e 3.2.)).

**Definizione 672** Definizione di **generatori** e di **base** di uno spazio vettoriale. (Vedere [A.V.] Capitolo 2, definizione 7.12 oppure [V.C.P.] definizione 4.1).

**Nota 673** Per indicare che uno spazio vettoriale  $V$  ha come insieme di generatori l'insieme dei vettori  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  alcune volte useremo il simbolismo:

$$V = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$$

Nota. in [V.C.P.] viene usato il simbolo  $L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ .

**Teorema 674** Un insieme finito di vettori di uno spazio vettoriale  $V$  è una base se e solo se ogni vettore  $\mathbf{v}$  di  $V$  si può esprimere in uno ed in un sol modo come combinazione lineare di tali vettori.

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio. Altrimenti vedere [A.V.] Capitolo 2, teorema 7.16) oppure [V.C.P.] capitolo 2, teorema 4.2.  $\square$

**Definizione 675** Data una base  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  di uno spazio vettoriale  $V$  su un campo  $K$ , abbiamo visto che ogni vettore  $\mathbf{v}$  di  $V$  si scrive in un sol modo come combinazione lineare di  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ . I coefficienti di tale combinazione lineare si dicono **coordinate** del vettore  $\mathbf{v}$  relative alla base data.

**Esempio 676** Diamo alcuni esempi di spazi vettoriali.

1) Si consideri un piano  $\pi$  ed un suo punto  $O$ . Chiamiamo **vettore** di  $\pi$  applicato in  $O$  la coppia  $(O, P)$  dove  $P$  è un punto di  $\pi$ . Indichiamo con  $V^2(\pi, O)$  l'insieme dei vettori di  $\pi$  applicati in  $O$ . Introducendo l'usuale definizione di addizione tra due vettori per mezzo della regola del parallelogramma e l'usuale moltiplicazione di un vettore per uno scalare, otteniamo uno spazio vettoriale sul campo dei numeri reali.

Due qualsiasi vettori di  $\pi$  non nulli applicati in  $O$  che non siano allineati formano una base di  $V^2(\pi, O)$ .

2) Analogamente l'insieme  $V^3(O)$  dei vettori dello spazio applicati in un suo punto  $O$ , con le usuali operazioni di addizione tra vettori e di moltiplicazione di un vettore per uno scalare, è uno spazio vettoriale su  $R$ . Una sua base è data da tre vettori applicati in  $O$  che non siano complanari.

3) L'insieme  $R$ , con le usuali operazioni di addizione e di moltiplicazione, è uno spazio vettoriale su  $R$  stesso. Una sua base è data dal numero 1. Tale base viene detta **base canonica** di  $R$  su  $R$ .

Un qualsiasi numero reale non nullo forma una base di  $R$ .

4) L'insieme  $R^2$  delle coppie di numeri reali, con le usuali operazioni di addizione di coppie e di moltiplicazione di una coppia per un numero reale, è uno spazio vettoriale su  $R$ . La coppia di vettori  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$  forma una base di  $R^2$  sul campo  $R$ , detta **base canonica** di  $R^2$ .

5) L'insieme  $R^n$  delle  $n$ -ple di numeri reali, con le usuali operazioni di addizione di  $n$ -ple e di moltiplicazione di una  $n$ -pla per un numero reale, è uno spazio

vettoriale su  $R$ . Gli  $n$  vettori

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$$

formano una base di  $R^n$  su  $R$ , detta **base canonica** di  $R^n$ .

6) Notiamo che, nel dimostrare che  $R, R^2, R^n$  sono spazi vettoriali su  $R$ , sfruttiamo solamente il fatto che  $R$  è un campo. Quindi, dato un campo  $K$ , possiamo dimostrare in modo analogo che  $K, K^2, K^n$  sono spazi vettoriali su  $K$ .

Anche in questo caso si hanno le basi canoniche. Il vettore 1, elemento neutro rispetto alla moltiplicazione di  $K$ , è la **base canonica** dello spazio vettoriale  $K$  sul campo  $K$  stesso. I vettori  $(1, 0), (0, 1)$  formano la **base canonica** di  $K^2$  su  $K$ . Analogamente si ha la **base canonica** di  $K^n$  su  $K$ .

7) Dato l'insieme  $M(R, p, q)$  delle matrici ad elementi reali a  $p$  righe e  $q$  colonne, si consideri in esso l'operazione di addizione tra matrici e l'operazione di moltiplicazione di una matrice per un numero reale. Si ha uno spazio vettoriale sui reali. Sia  $A(i, j)$  la matrice avente tutti gli elementi uguali a 0, fuorchè l'elemento della  $i$ -sima riga e  $j$ -sima colonna che è uguale a 1. L'insieme delle  $p \cdot q$  matrici  $A(i, j)$  è una base di  $M(R, p, q)$ . Essa viene detta **base canonica**.

8) Tutto ciò si generalizza al caso di matrici ad elementi in un campo  $K$  qualsiasi. Si ha che  $M(K, p, q)$  è uno spazio vettoriale su  $K$ . La base data dalle matrici  $A(i, j)$  viene detta anche in questo caso **base canonica**.

9) Consideriamo l'insieme  $C$  dei numeri complessi. Esso è, con le usuali operazioni, uno spazio vettoriale su  $C$  stesso (esempio 6). La sua **base canonica** è data dal numero 1. Vogliamo considerare ora  $C$  come spazio vettoriale su  $R$ . A tale scopo consideriamo l'usuale addizione tra numeri complessi e la moltiplicazione di un numero complesso per un numero reale. Si ottiene uno spazio vettoriale. Una sua base è data da  $\{1, i\}$ . Essa è detta **base canonica** dello spazio vettoriale  $C$  sul campo  $R$  dei reali. Notiamo che, se consideriamo  $C$  come spazio vettoriale su  $C$ , i vettori 1 e  $i$  non sono linearmente indipendenti. Si ha infatti  $i \cdot 1 + (-1) \cdot i = 0$ . Abbiamo quindi una loro combinazione lineare a coefficienti non nulli che è uguale al vettore nullo.

10) Sia dato l'insieme  $C^2$  delle coppie di numeri complessi. Abbiamo visto che, se in esso si considerano le usuali operazioni di addizione tra coppie e di moltiplicazione di una coppia per un numero complesso, otteniamo uno spazio vettoriale su  $C$  (esempio 6). La sua **base canonica** è data da  $\{(1, 0), (0, 1)\}$ .

Consideriamo ora, in analogia al caso precedente, le operazioni di addizione tra coppie di numeri complessi e di moltiplicazione di una coppia di numeri complessi per un numero reale. Abbiamo così uno spazio vettoriale su  $R$ .

I vettori  $\{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)\}$  formano una base, detta **base canonica** dello spazio vettoriale  $C^2$  sul campo dei reali.

11) In modo analogo, per ogni intero  $n > 0$ , possiamo definire lo spazio vettoriale  $C^n$  sul campo dei reali. Esso è dotato della **base canonica** formata da  $2n$  vettori. Essi sono dati dalle  $n$ -ple di numeri complessi, aventi tutti gli elementi nulli fuorchè uno che è uguale a 1 o a  $i$ . Lo spazio vettoriale  $C^n$  sul campo  $R$  ha quindi una base formata da  $2n$  vettori.

12) Si consideri l'insieme  $R^n[x]$  dei polinomi di grado minore di  $n$  a coefficienti in

$R$  in una variabile  $x$ . Consideriamo in esso l'usuale addizione tra polinomi e l'usuale moltiplicazione di un polinomio per un numero reale. Dati cioè i polinomi:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \\ q(x) &= b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} \end{aligned}$$

e un numero reale  $k$ , si pone:

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} \\ kp(x) &= ka_0 + ka_1x + \cdots + ka_{n-1}x^{n-1}. \end{aligned}$$

Si verifica facilmente che  $R^n[x]$  è uno spazio vettoriale su  $R$ . Una sua base è data dai vettori:

$$\mathbf{e}_0 = 1, \mathbf{e}_1 = x, \dots, \mathbf{e}_{n-1} = x^{n-1}$$

Questa base viene detta **base canonica** di  $R^n[x]$  su  $R$ .

13) Anche in questo caso notiamo che, per dimostrare che  $R^n[x]$  è uno spazio vettoriale su  $R$ , abbiamo sfruttato solamente le proprietà di campo di  $R$ . Possiamo quindi generalizzare l'esempio precedente. Dato un campo  $K$ , sia  $K^n[x]$  l'insieme dei polinomi di grado minore di  $n$  a coefficienti nel campo  $K$  nella variabile  $x$ . Esso è uno spazio vettoriale sul campo  $K$ . La sua **base canonica** è uguale a quella dell'esempio precedente.

## 5.2 Basi di Lagrange

Consideriamo lo spazio vettoriale  $R^3[x]$  dei polinomi in una variabile  $x$ , di grado minore di 3 a coefficienti nel campo  $R$  dei reali. Supponiamo di avere tre numeri reali  $x_1, x_2, x_3$  distinti e supponiamo di avere tre numeri reali  $b_1, b_2, b_3$  qualsiasi. Ci chiediamo se esistono polinomi  $p(x) \in R^3[x]$  per cui si abbia

$$p(x_1) = b_1 \quad p(x_2) = b_2 \quad p(x_3) = b_3.$$

Per rispondere a questa domanda, prendiamo un polinomio generico

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

e imponiamo le condizioni richieste. Otteniamo un sistema di tre equazioni nelle tre incognite  $a_0, a_1, a_2$ . La matrice dei coefficienti del sistema ha determinante non nullo (è una matrice di Vandermonde). Il sistema ammette quindi una ed una sola soluzione (teorema di Cramer). Abbiamo quindi il seguente risultato.

**Teorema 677** Dati tre numeri reali  $x_1, x_2, x_3$  distinti e tre numeri reali  $b_1, b_2, b_3$  qualsiasi, esiste uno ed un solo polinomio  $p(x) \in R^3[x]$  per cui si abbia

$$p(x_1) = b_1 \quad p(x_2) = b_2 \quad p(x_3) = b_3.$$

DIMOSTRAZIONE. Appena fatta.  $\square$

**Nota 678** Si può dare un significato geometrico al teorema appena dimostrato. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nel piano, dati tre punti distinti di esso non appartenenti a due a due ad una stessa retta parallela all'asse delle ordinate, per i tre punti passa o una retta o una parabola avente l'asse parallelo all'asse delle ordinate.

Vogliamo ora determinare effettivamente il polinomio del teorema 677. Potremmo determinarlo risolvendo il sistema, per esempio utilizzando la regola di Cramer. Ma noi vogliamo fare il minimo di calcoli. Proviamo allora a risolvere un problema più semplice. Vogliamo determinare un polinomio  $p_1(x) \in R^3[x]$  per cui si abbia:

$$p_1(x_1) = 1 \quad p_1(x_2) = 0 \quad p_1(x_3) = 0.$$

Sappiamo dal teorema precedente che un polinomio siffatto esiste ed è unico. Notiamo che il polinomio cercato deve avere  $x_2$  e  $x_3$  come radici. Esso deve allora avere come fattori  $(x - x_2)$  e  $(x - x_3)$ . Ma allora si deve avere  $p_1(x) = a(x - x_2)(x - x_3)$ , con  $a$  numero reale che dobbiamo ancora determinare. Determiniamo  $a$  ricordandoci che il polinomio cercato deve valere 1 in  $x_1$ . In definitiva otteniamo:

$$p_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

Notiamo che il polinomio  $b_1 p_1(x)$  verifica le condizioni:

$$b_1 p_1(x_1) = b_1 \quad b_1 p_1(x_2) = 0 \quad b_1 p_1(x_3) = 0.$$

Torniamo al nostro problema iniziale: vogliamo determinare il polinomio che assuma in  $x_1, x_2, x_3$  rispettivamente i valori  $b_1, b_2, b_3$ . Ricordiamo che il polinomio  $b_1 p_1(x)$  assume in  $x_1$  il valore desiderato e che negli altri due punti si annulla. Dovrebbe ora essere chiaro il procedimento da seguire. Consideriamo il polinomio:

$$p_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

esso verifica le condizioni:

$$p_2(x_1) = 0 \quad p_2(x_2) = 1 \quad p_2(x_3) = 0.$$

Consideriamo poi il polinomio:

$$p_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

esso verifica le condizioni:

$$p_3(x_1) = 0 \quad p_3(x_2) = 0 \quad p_3(x_3) = 1.$$

E quindi il polinomio:

$$p(x) = b_1 p_1(x) + b_2 p_2(x) + b_3 p_3(x)$$

verifica le condizioni richieste:

$$p(x_1) = b_1 \quad p(x_2) = b_2 \quad p(x_3) = b_3.$$

Ecco che abbiamo determinato il nostro polinomio non facendo praticamente alcun calcolo.

**Teorema 679** I polinomi:

$$p_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$p_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$p_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

formano una base, detta **base di Lagrange relativa a**  $x_1, x_2, x_3$ , dello spazio vettoriale  $R^3[x]$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Dobbiamo dimostrare innanzitutto che i tre vettori generano lo spazio vettoriale. Sia  $q(x)$  un polinomio di  $R^3[x]$ . Dobbiamo dimostrare che esso è esprimibile come combinazione lineare dei tre vettori. Consideriamo i valori  $q(x_1), q(x_2), q(x_3)$  assunti da  $q(x)$  in  $x_1, x_2, x_3$ . Notiamo che il polinomio  $p(x) = q(x_1)p_1(x) + q(x_2)p_2(x) + q(x_3)p_3(x)$  assume sui tre punti gli stessi valori assunti dal polinomio  $q(x)$ . Dal teorema 677 segue allora  $q(x) = p(x)$ , proprio ciò che volevamo dimostrare.

Dobbiamo ora dimostrare che i tre polinomi sono linearmente indipendenti. Sia  $p(x) = b_1p_1(x) + b_2p_2(x) + b_3p_3(x) = 0$ . Dobbiamo dimostrare che i tre coefficienti della combinazione lineare sono tutti nulli. Il polinomio  $p(x)$ , poiché è, per ipotesi, identicamente nullo, assume sui tre punti il valore 0. Ma il valore assunto da  $p(x)$  sui punti  $x_1, x_2, x_3$  è uguale rispettivamente a  $b_1, b_2, b_3$ . Da ciò otteniamo  $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ ; cioè la tesi.  $\square$

**Nota 680** In precedenza avevamo considerato la base canonica di  $R^3[x]$ . Abbiamo ora determinato un'altra base, quella di Lagrange. Ognuna delle due basi ha i suoi pregi e difetti. Quella canonica ha il vantaggio che le coordinate di un polinomio relative ad essa sono proprio i coefficienti del polinomio; quella di Lagrange permette di evitare molti calcoli quando si voglia determinare un polinomio che assuma determinati valori in determinati punti. Vi sono altre basi di  $R^3[x]$  che, in particolari situazioni, potrebbero essere più convenienti della base canonica o della base di Lagrange. La scelta della base più conveniente dipende ovviamente dall'intuito.

**Esempio 681** Il polinomio  $p(x) \in R^3[x]$  tale che

$$p(0) = 7 \quad p(3) = 2 \quad p(9) = 9$$

è dato da:

$$p(x) = 7 \frac{(x-3)(x-9)}{(0-3)(0-9)} + 2 \frac{(x-0)(x-9)}{(3-0)(3-9)} + 9 \frac{(x-0)(x-3)}{(9-0)(9-3)}$$

**Esercizio 682** Determinare il polinomio  $p(x) \in R^3[x]$  tale che

$$p(\pi) = 0.1 \quad p(1.5) = 0 \quad p(\sqrt{2}) = 12$$

**Nota 683** Notiamo che, nel costruire la base di Lagrange, abbiamo sfruttato solamente le proprietà di campo di  $R$ . Possiamo quindi generalizzare tutto ciò al caso di polinomi in  $K^3[x]$  con  $K$  campo qualsiasi. Cerchiamo, ad esempio, il polinomio  $p(x)$  di grado minore di 3 a coefficienti in  $Z_5$  verificante le seguenti condizioni:

$$p([3]_5) = [2]_5, \quad p([4]_5) = [3]_5, \quad p([0]_5) = [1]_5$$

Si ha:

$$\begin{aligned} p(x) = & [2]_5([3]_5 - [4]_5)^{-1}([3]_5 - [0]_5)^{-1}(x - [4]_5)(x - [0]_5) + \\ & + [3]_5([4]_5 - [3]_5)^{-1}([4]_5 - [0]_5)^{-1}(x - [3]_5)(x - [0]_5) + \\ & + [1]_5([0]_5 - [3]_5)^{-1}([0]_5 - [4]_5)^{-1}(x - [3]_5)(x - [4]_5) \end{aligned}$$

Si lascia come esercizio lo sviluppo dei calcoli.

**Esercizio 684** Determinare un polinomio  $p(x)$  di grado minore di 3, a coefficienti interi, tale che:

$$p(1) \equiv 19 \pmod{7}, \quad p(23) \equiv 100 \pmod{7}, \quad p(12) \equiv -5 \pmod{7}$$

**Nota 685** [Generalizzazione] Vogliamo ora determinare un polinomio  $p(x)$  a coefficienti reali che assuma in  $n$  punti  $x_1, x_2, \dots, x_n$  distinti i valori reali  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Con un procedimento analogo a quello dato nel teorema 677 si dimostra che di polinomi siffatti di grado minore di  $n$  ne esiste uno ed uno solo. Per determinarlo effettivamente conviene definire una **base di Lagrange** di  $R^n[x]$ . Essa è analoga alla base di Lagrange di  $R^3[x]$ . La sua costruzione viene lasciata per esercizio.

**Esercizio 686** Determinare un polinomio di grado minore di 4 a coefficienti reali che assuma nei punti 0, 7, 8, 9 i valori 2, 5, 12, 31 rispettivamente.

**Esercizio 687** Determinare il polinomio di grado minimo a coefficienti reali che assuma nei punti 3, 2, 4, 5, 9 i valori 0, 3, 1, 0,  $\pi$ .

**Nota 688** [Ulteriore generalizzazione] Tutto ciò può essere generalizzato al caso di polinomi a coefficienti in un campo  $K$  qualsiasi.

**Esercizio 689** Determinare un polinomio di grado minimo a coefficienti interi che assuma su 1, 3, 5 e 7 valori interi congrui modulo 11 rispettivamente ai numeri 3, 21, 121 e 12.

### 5.3 Dimensione di uno spazio vettoriale

**Teorema 690** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $K$  e sia  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  una sua base. Dati  $r$  vettori di  $V$ , le coordinate, relative alla base data, di una combinazione lineare degli  $r$  vettori sono uguali alle combinazioni lineari delle coordinate degli  $r$  vettori.

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio.  $\square$

**Esempio 691** Consideriamo i vettori  $p(x) = 1 + x$  e  $q(x) = 2 + 3x + 4x^2$ . Essi sono elementi di  $R^3[x]$ . Le coordinate di  $p(x)$ , relative alla base canonica di  $R^3[x]$  sono  $(1, 1, 0)$ , mentre le coordinate di  $q(x)$  sono  $(2, 3, 4)$ . Consideriamo ora il polinomio  $2p(x) + 5q(x)$ . Si ha:

$$2p(x) + 5q(x) = 12 + 17x + 20x^2$$

Le coordinate di  $2p(x) + 5q(x)$  relative alla base canonica sono date da:

$$(12, 17, 20) = (2 \cdot 1 + 5 \cdot 2, 2 \cdot 1 + 5 \cdot 3, 2 \cdot 0 + 5 \cdot 4)$$

Facciamo anche un'altra verifica. Consideriamo la base di Lagrange di  $R^3[x]$  relativa ai punti  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 2$ .

Le coordinate di  $p(x)$  relative a tale base sono  $(1, 2, 3)$ , mentre le coordinate di  $q(x)$  sono  $(2, 9, 24)$  (verificare questa affermazione facendo meno calcoli possibile). Le coordinate relative alla base di Lagrange del polinomio  $2p(x) + 5q(x) = 12 + 17x + 20x^2$  sono  $(12, 49, 126)$  (verificare).

Si ha:

$$12 = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2, \quad 49 = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 9, \quad 126 = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 24$$

che è quel che ci si aspettava.

**Teorema 692** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $K$  e sia  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  una sua base. Siano  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$  vettori di  $V$ . Sia  $A$  la matrice a  $n$  righe e  $r$  colonne avente come colonne le coordinate degli  $r$  vettori relative alla base data. Sia  $p$  il rango della matrice  $A$ . Possiamo allora scegliere tra gli  $r$  vettori al massimo  $p$  vettori linearmente indipendenti. Essi sono dati da quei vettori le cui coordinate servono a formare un minore invertibile di  $A$  di ordine  $p$ . Inoltre tutti gli altri vettori sono combinazione lineare dei  $p$  vettori appena scelti.

DIMOSTRAZIONE: Sappiamo dalla proposizione precedente che una combinazione lineare dei vettori si riflette in una combinazione lineare delle colonne delle loro coordinate. La proposizione deriva dal teorema che lega il rango di una matrice con il massimo numero di colonne linearmente indipendenti della matrice stessa.  $\square$

**Teorema 693** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $K$  e sia  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  una sua base. Dati comunque  $r$  vettori con  $r > n$ , essi sono linearmente dipendenti.

DIMOSTRAZIONE. Si consideri la matrice avente come colonne le coordinate degli  $r$  vettori relativamente alla base data. Il rango di tale matrice al massimo è uguale a  $n < r$ . Da cui segue la tesi per la proposizione precedente.  $\square$

**Teorema 694** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $K$  dotato di una base formata da  $n$  elementi. Se  $n$  vettori sono linearmente indipendenti, allora essi formano una base di  $V$ .

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo, per assurdo, che tali  $n$  vettori non siano generatori di  $V$ . Allora esisterebbe un vettore di  $V$  che non sarebbe combinazione lineare degli  $n$  vettori dati. Avremmo allora trovato  $n + 1$  vettori linearmente indipendenti. Ciò è assurdo per il teorema precedente.  $\square$

**Teorema 695** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $K$ .

Siano  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$   $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$  due sue basi. Allora si ha  $n = m$ .

DIMOSTRAZIONE. Poiché  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$  è una base, i suoi vettori sono linearmente indipendenti; quindi, per la proposizione precedente, si ha  $m \leq n$ . Scambiando tra loro i ruoli delle due basi si ottiene anche  $n \leq m$ . Da cui la tesi.  $\square$

**Definizione 696** Il teorema precedente ci assicura che, se uno spazio vettoriale ha una base con  $n$  elementi, allora ogni altra sua base ha  $n$  elementi. Tale numero  $n$  viene detto **dimensione** dello spazio vettoriale.

**Nota 697** Diamo ora un metodo per determinare una base di uno spazio vettoriale  $V$ . Se  $V = \{\mathbf{0}\}$ , esso non è dotato di alcuna base. Non esistono infatti in  $V$  vettori linearmente indipendenti. In questo caso diciamo che  $V$  ha dimensione uguale a 0. Sia  $V \neq \{\mathbf{0}\}$ . Esiste quindi in  $V$  almeno un vettore non nullo. Scegliamone uno e chiamiamolo  $\mathbf{e}_1$ . Se  $\mathbf{e}_1$  genera  $V$ , esso è una base di  $V$ . Altrimenti esiste almeno un vettore di  $V$  che non è combinazione lineare di  $\mathbf{e}_1$ . Scegliamone uno e chiamiamolo  $\mathbf{e}_2$ . Quindi  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  sono linearmente indipendenti. Se essi generano  $V$ , abbiamo determinato una base di  $V$ . Altrimenti possiamo iterare questo procedimento. Abbiamo ora due possibilità:

- 1) ad un certo punto otteniamo  $n$  vettori  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  che formano una base di  $V$ ;
- 2) il procedimento può continuare all'infinito. Esistono cioè, per ogni  $n$  intero,  $n$  vettori linearmente indipendenti.

Nel secondo caso diremo che lo spazio vettoriale ha **dimensione infinita**.

**Nota 698** La dizione “dimensione infinita” deriva dal fatto che, ispirandoci al teorema 674, possiamo dare una **nuova definizione di base**:

un sottoinsieme (eventualmente composto da infiniti elementi) di uno spazio vettoriale  $V$  su un campo  $K$  si dice **base** se ogni vettore di  $V$  si può esprimere in uno ed un sol modo come combinazione lineare di un numero finito di elementi del sottoinsieme. Nel caso in cui l'insieme sia formato da un numero finito di elementi, questa nuova definizione di base coincide con la vecchia definizione. Il prossimo esempio mostra che esistono spazi vettoriali non dotati di basi finite ma dotati di basi (secondo la nuova definizione) infinite. Si può anzi dimostrare (noi non lo facciamo) che uno spazio vettoriale non formato dal solo vettore nullo è sempre dotato di una base (finita o infinita).

Si può dimostrare che due qualsiasi basi (finite o infinite) di uno spazio vettoriale hanno la stessa cardinalità. Ciò permette di estendere anche al caso di spazi vettoriali dotati di basi infinite la nozione di **dimensione** (finita o infinita) di

uno spazio vettoriale. Si può anche dimostrare che, dato un campo  $K$  e data una qualsiasi cardinalità (finita o infinita), sia essa  $a$ , esiste uno spazio vettoriale sul campo  $K$  avente dimensione uguale alla cardinalità  $a$ .

Non possiamo dare le dimostrazioni di queste affermazioni. Chi è interessato può consultare, per esempio, il nono capitolo del secondo volume di N. Jacobson (vedere bibliografia alla fine di questo capitolo).

**Esempio 699** Sia  $R[x]$  l'insieme dei polinomi di grado qualsiasi a coefficienti reali. Tale insieme, con le usuali operazioni di addizione di polinomi e di moltiplicazione di un polinomio per un numero reale, è uno spazio vettoriale. Tale spazio non può essere dotato di una base formata da un numero finito di elementi. Si nota, infatti, che, dato un numero  $n$  di polinomi, qualsiasi combinazione lineare di essi è un polinomio di grado minore o uguale al massimo dei gradi degli  $n$  polinomi considerati. Tali polinomi non possono quindi generare tutto  $R[x]$ . Notiamo tuttavia che i polinomi  $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$  formano una base infinita di  $R[x]$ . Lasciamo la dimostrazione di quest'ultima affermazione per esercizio (ricordarsi che un polinomio è per definizione la somma di un numero finito di monomi).

## 5.4 Sottospazi vettoriali

**Definizione 700** Definizione di sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale. (Vedere [A.V.] Capitolo 2, definizione 7.17 oppure [V.C.P.] capitolo 2, definizione 2.1).

**Teorema 701** Condizione necessaria e sufficiente affinché un sottoinsieme non vuoto  $W$  di uno spazio vettoriale  $V$  su un campo  $K$  sia un sottospazio vettoriale di  $V$  è che, se  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  sono vettori di  $W$ , allora ogni loro combinazione lineare è vettore di  $W$ .

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. Oppure vedere [A.V.] Capitolo 2, teorema 7.19. o [V.C.P.] capitolo 2, teorema 2.2.  $\square$

**Esempio 702** [Sottospazi vettoriali di  $V^2(\pi, O)$ ] L'unico sottospazio vettoriale di dimensione 0 è il sottospazio formato dal solo vettore nullo.

Sia ora  $V$  un sottospazio vettoriale di dimensione 1. Sia  $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$  una sua base. Quindi  $\mathbf{v}$  è un vettore non nullo. Il sottospazio  $V$  è dato dai vettori  $k\mathbf{v}$  al variare di  $k$  in  $R$ . Esso è quindi dato dai vettori appartenenti alla retta passante per  $O$  e per  $P$ . Viceversa, l'insieme di tutti i vettori appartenenti ad una retta passante per  $O$  è un sottospazio vettoriale di dimensione 1. L'unico sottospazio vettoriale di dimensione 2 è lo spazio  $V^2(\pi, O)$ .

**Esempio 703** [Sottospazi vettoriali di  $V^3(O)$ ] I sottospazi di dimensione 0 e 1 sono, rispettivamente, il vettore nullo e le rette passanti per  $O$ . Si lascia come esercizio la dimostrazione che i sottospazi di dimensione 2 sono i piani passanti per  $O$ .

**Esercizio 704** Dato un campo  $K$ , sia  $T^K(n)$  il sottoinsieme di  $M(K, n, n)$  delle matrici triangolari superiori. Dimostrare che esso è un sottospazio vettoriale di  $M(K, n, n)$  e determinarne la dimensione.

**Esercizio 705** Dato un campo  $K$ , sia  $T_K(n)$  il sottoinsieme di  $M(K, n, n)$  delle matrici triangolari inferiori. Dimostrare che esso è un sottospazio vettoriale di  $M(K, n, n)$  e determinarne la dimensione.

**Esercizio 706** Dato un campo  $K$ , sia  $D_K(n)$  il sottoinsieme di  $M(K, n, n)$  delle matrici diagonali. Dimostrare che esso è un sottospazio vettoriale sia di  $T^K(n)$  che di  $T_K(n)$  e determinarne la dimensione.

**Esercizio 707** Dato un campo  $K$ , sia  $S(K, n)$  il sottoinsieme di  $M(K, n, n)$  delle matrici simmetriche. Dimostrare che esso è un sottospazio vettoriale di  $M(K, n, n)$  e determinarne la dimensione.

**Teorema 708** Sia dato un sistema omogeneo  $SO$  di  $p$  equazioni in  $q$  incognite a coefficienti in un campo  $K$ . Si ha cioè:

$$SO : AX = 0$$

dove  $A \in M(K, p, q)$  è la matrice dei coefficienti del sistema e  $X$  è la matrice a  $q$  righe e 1 colonna delle incognite. L'insieme  $Sol(SO)$  delle soluzioni di  $SO$  è un sottospazio vettoriale di  $K^q$  avente dimensione uguale a  $q - \text{rk}(A)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Per dimostrare che l'insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale utilizziamo il teorema 701. Notiamo innanzitutto che  $Sol(SO) \neq \emptyset$ , infatti  $K^q \ni 0 \in Sol(SO)$ . Siano ora  $Y$  e  $Y'$  due soluzioni di  $SO$ . Quindi  $AY = AY' = 0$ . Ma allora, per ogni  $h$  e  $k$  in  $K$  si ha  $A(hY + kY') = hAY + kAY' = h0 + k0 = 0$ . Quindi  $hY + kY' \in Sol(SO)$ . Abbiamo dimostrato che  $Sol(SO)$  è un sottospazio vettoriale. Per calcolare la sua dimensione, ricordiamo il teorema di Rouché-Capelli. Sia  $n$  il rango della matrice  $A$ . Abbiamo allora determinato  $q - n$  soluzioni particolari di  $SO$  che abbiamo indicato con  $X^1, \dots, X^{q-n}$  ed abbiamo dimostrato che le soluzioni di  $SO$  sono tutte e sole le combinazioni lineari di  $X^1, \dots, X^{q-n}$  e che tali  $q - n$  vettori di  $K^q$  sono linearmente indipendenti. Abbiamo cioè dimostrato che tali  $q - n$  vettori formano una base per  $Sol(SO)$ . Da cui la tesi.  $\square$

**Esercizio 709** Siano  $x_1, \dots, x_n$  numeri reali distinti e sia  $m \geq n$ . Sia:

$$V = \{p(x) \in R^m[x] \mid p(x_1) = \dots = p(x_n) = 0\}.$$

Dimostrare che  $V$  è un sottospazio vettoriale di  $R^m[x]$  di dimensione uguale a  $m - n$ .

**SUGGERIMENTO.** Un metodo potrebbe essere quello di utilizzare la base canonica di  $R^m[x]$  ed applicare il teorema precedente. Se però non si vuole utilizzare la matrice di Vandermonde e se si vogliono fare meno calcoli, si suggerisce di aggiungere  $m - n$  punti  $x_{n+1}, \dots, x_m$  distinti tra loro e distinti dai precedenti  $n$  punti e utilizzare la base di Lagrange.

**Esercizio 710** Generalizzare l'esercizio precedente al caso di  $K^m[x]$ , dove  $K$  è un campo qualsiasi.

**Teorema 711** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $K$ . Dati  $r$  vettori  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  di  $V$  sia  $S$  l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari. Allora:

- 1) L'insieme  $S$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .
- 2) I vettori  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  generano  $S$ . Per questa ragione  $S$  viene detto **sottospazio vettoriale generato** dai vettori  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ .
- 3) Se i vettori  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  sono linearmente indipendenti, essi formano una base di  $S$ .
- 4) Se  $W$  è un sottospazio vettoriale contenente i vettori  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ , allora  $W$  contiene  $S$ .

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio.  $\square$

**Teorema 712** Sia  $E$  uno spazio vettoriale su un campo  $K$  e siano  $V$  e  $W$  due suoi sottospazi vettoriali. Allora  $V \cap W$  è un sottospazio vettoriale di  $E$ .

DIMOSTRAZIONE. Esercizio.  $\square$

**Teorema 713** Dato uno spazio vettoriale  $E$  su un campo  $K$ , siano  $V$  e  $W$  due suoi sottospazi vettoriali. Sia:

$$V + W = \{v + w \mid v \in V, w \in W\}$$

Allora:

- 1)  $V + W$  è un sottospazio vettoriale di  $E$ . Esso viene detto **sottospazio somma** di  $V$  e  $W$ .
- 2)  $V \subseteq V + W$  ,  $W \subseteq V + W$
- 3) Se  $U$  è un sottospazio vettoriale di  $E$  tale che  $V \subseteq U$  e  $W \subseteq U$ , allora si ha  $V + W \subseteq U$ .

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio.  $\square$

**Esempio 714** Si consideri lo spazio vettoriale  $R^5[x]$  dei polinomi di grado minore di 5. Sia  $V$  il suo sottospazio vettoriale avente come base:

$$\{p_1(x) = 1 + x + x^2 + 3x^4, p_2(x) = 1 + x + 2x^4\}$$

Sia  $W$  il sottospazio avente come base:

$$\{p_3(x) = 2 + 2x^4, p_4(x) = 1 + 2x + x^2 + 4x^4\}$$

Vogliamo determinare una base per  $V + W$  e una base di  $V \cap W$ .

Cerchiamo innanzitutto una base per  $V + W$ . Dimostriamo innanzitutto che  $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$  è un insieme di generatori di  $V + W$ . Sia infatti  $p(x) \in V + W$ , allora  $p(x) = q(x) + r(x)$  con  $q(x) \in V$  e  $r(x) \in W$ . Ma  $q(x) = a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x)$  e  $r(x) = b_3 p_3(x) + b_4 p_4(x)$ . Da cui segue immediatamente che  $p(x)$  è combinazione lineare dei quattro vettori. Tali vettori sono quindi generatori di  $V + W$ . Per estrarre da essi una base dobbiamo estrarre da

essi il massimo numero di vettori linearmente indipendenti. Per fare ciò sfruttiamo il teorema 692. Consideriamo una base di  $R^5[x]$ , per esempio la base canonica, e consideriamo la matrice  $A$  avente come colonne le coordinate dei quattro vettori. Si ha:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Si verifica facilmente che  $A$  ha rango uguale a 3. Si ha quindi:

$$\dim(V + W) = \text{rk}(A)$$

Il minore formato dalle prime tre righe e prime tre colonne è invertibile. I primi tre vettori formano quindi una base di  $V + W$ . Notiamo inoltre che anche il minore formato dalle prime tre righe e dalle ultime tre colonne è invertibile. Un'altra base di  $V + W$  è data quindi dagli ultimi tre vettori.

Vogliamo ora determinare una base di  $V \cap W$ . A tale scopo cerchiamo i vettori  $p(x) \in V \cap W$ . Si ha:

$$p(x) \in V \implies p(x) = a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x)$$

$$p(x) \in W \implies p(x) = b_3 p_3(x) + b_4 p_4(x)$$

Da cui, avendo posto  $a_3 = -b_3$  e  $a_4 = -b_4$ , si ottiene:

$$a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) + a_3 p_3(x) + a_4 p_4(x) = 0$$

Abbiamo quindi un'equazione vettoriale nelle incognite  $a_1, \dots, a_4$ . Se si passa dall'equazione vettoriale alle equazioni con le coordinate dei vettori relative alla base canonica, si ottiene un sistema omogeneo di 5 equazioni in 4 incognite. La matrice dei coefficienti non è altro che la matrice  $A$ . L'insieme delle soluzioni ha quindi dimensione uguale a  $4 - \text{rk}(A) = 1$ . Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$a_1 = t, \quad a_2 = t, \quad a_3 = -\frac{1}{2}t, \quad a_4 = -t$$

e i vettori di  $V \cap W$  sono del tipo:

$$p(x) = t p_1(x) + t p_2(x) = t(2 + 2x + x^2 + 5x^4)$$

ed una sua base è data dal vettore  $2 + 2x + x^2 + 5x^4$ . Notiamo che si ha:

$$\dim(V \cap W) = 4 - \text{rango}(A).$$

**Nota 715** Dalla definizione di  $V + W$  segue che ogni vettore di  $V + W$  si scrive come  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$  con  $\mathbf{v} \in V$ ,  $\mathbf{w} \in W$ . Tale scrittura può NON essere unica. Si consideri infatti l'esempio precedente. Dato infatti il vettore  $q(x) = x + x^4$ , si

ha  $q(x) = -p_1(x) + p_4(x)$ . Considerato poi un qualsiasi vettore  $p(x) \in V \cap W$ , si ha:

$$q(x) = (-p_1(x) + p(x)) + (-p(x) + p_4(x))$$

Notiamo che si ha  $-p_1(x) + p(x) \in V$  e  $-p(x) + p_4(x) \in W$ .

Prendendo quindi, per esempio,  $p(x) = p_1(x) + p_2(x)$ , otteniamo una seconda scrittura di  $q(x)$ :

$$\begin{aligned} q(x) &= [-p_1(x) + p(x)] + [-p(x) + p_4(x)] = \\ &= [-p_1(x) + p_1(x) + p_2(x)] + [-p_1(x) - p_2(x) + p_4(x)] = \\ &= p_2(x) + [-p_1(x) - p_2(x) + p_4(x)] \end{aligned}$$

**Teorema 716** Sia  $E$  uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo  $K$ . Siano  $V$  e  $W$  due suoi sottospazi vettoriali. Si ha la **formula di Grassman**<sup>1</sup>

$$\dim V + \dim W = \dim(V + W) + \dim(V \cap W).$$

**DIMOSTRAZIONE.** La dimostrazione ricalca il procedimento utilizzato nell'esempio 714. Ne diamo quindi rapidi cenni, lasciando i particolari come esercizio. Si fissa una base  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  dello spazio  $E$ . Si fissa una base  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$  di  $V$  e una base  $\{\mathbf{w}_{p+1}, \dots, \mathbf{w}_{p+q}\}$  di  $W$ . Si considera la matrice  $A$  avente come colonne le coordinate, relative alla base  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  di  $V$ , dei vettori  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_{p+1}, \dots, \mathbf{w}_{p+q}\}$ . Si ha  $\dim(V + W) = \text{rango}(A)$ . Si determina ora una base di  $V \cap W$  con il procedimento utilizzato nell'esempio 714. Si ha un sistema omogeneo di  $n$  equazioni in  $p + q$  incognite in cui  $A$  è la matrice dei coefficienti. La dimensione di  $(V \cap W)$  è uguale alla dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema. Essa è uguale a  $p + q - \text{rango}(A)$ . Da cui segue facilmente la tesi.  $\square$

**Esercizio 717** Determinare una base per  $S(R, 2) + T^R(2)$  e una base per  $S(R, 2) \cap T^R(2)$ .

**Esercizio 718** Determinare una base per  $S(R, n) + T^R(n)$  e una base per  $S(R, n) \cap T^R(n)$ .

**Esercizio 719** Sia dato uno spazio vettoriale  $E$  di dimensione 3 su un campo  $K$ . Siano  $V$  e  $W$  due suoi sottospazi vettoriali aventi ambedue dimensione uguale a 2. Cosa si può dire per la dimensione di  $V + W$  e per la dimensione di  $V \cap W$ ?

**Esercizio 720** Dimostrare, sfruttando la formula di Grassman, la seguente proprietà di geometria: se due piani hanno almeno un punto di intersezione, allora o essi coincidono o hanno come intersezione una retta.

**SUGGERIMENTO.** Indicato con  $O$  il punto di intersezione dei due piani, consideriamo lo spazio vettoriale  $V^3(O)$ . I due piani sono allora sottospazi vettoriali di dimensione 2 di  $V^3(O)$ . Il sottospazio somma ha dimensione uguale a 2 o a 3. Dal calcolo della dimensione del sottospazio intersezione segue allora la tesi.

<sup>1</sup>Hermann Günther Grassman, (1809,1877), matematico e indianista tedesco.

**Esercizio 721** Dimostrare il seguente teorema. Dato uno spazio vettoriale  $E$  di dimensione finita, se  $V$  e  $W$  sono due suoi sottospazi vettoriali tali che  $\dim(V + W) = \dim(W)$ , allora si ha  $V \subseteq W$ .

## 5.5 Somma diretta

La somma diretta di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale è un caso particolare della somma.

**Definizione 722** Sia dato uno spazio vettoriale  $E$ . Siano  $U, V$  e  $W$  suoi sottospazi vettoriali. Il sottospazio vettoriale  $U$  si dice **somma diretta** di  $V$  e  $W$  se si ha:

$$V \cap W = \{\mathbf{0}\} \quad , \quad V + W = U$$

Se  $U$  è somma diretta di  $V$  e  $W$ , si usa il simbolo:

$$U = V \oplus W$$

**Teorema 723** Sia dato uno spazio vettoriale  $E$ . Siano  $U, V$  e  $W$  suoi sottospazi vettoriali. Si ha che  $U = V \oplus W$  se e solo se ogni vettore  $\mathbf{u}$  di  $U$  si può scrivere **in modo unico** come  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$  con  $\mathbf{v} \in V$ ,  $\mathbf{w} \in W$ .

DIMOSTRAZIONE. Vedere [A.V.] Capitolo 2, teorema 8.10. oppure [V.C.P.] capitolo 2, teorema 6.6.  $\square$

**Teorema 724** Sia  $E$  uno spazio vettoriale su un campo  $K$  e siano  $V$  e  $W$  due suoi sottospazi vettoriali di dimensione finita. Sia  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$  una base di  $V$  e  $\{\mathbf{w}_{p+1}, \dots, \mathbf{w}_{p+q}\}$  una base di  $W$ . Allora  $V + W = V \oplus W$  se e solo se  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_{p+1}, \dots, \mathbf{w}_{p+q}\}$  è una base di  $V + W$ .

DIMOSTRAZIONE. Utilizzare la formula di Grassman.  $\square$

**Teorema 725** Si ha:

$$\dim(V \oplus W) = \dim(V) + \dim(W)$$

DIMOSTRAZIONE. Ovvio.  $\square$

**Definizione 726** Sia  $E$  uno spazio vettoriale su un campo  $K$  e siano  $V$  e  $W$  due suoi sottospazi vettoriali tali che  $E = V \oplus W$ . Allora i sottospazi  $V$  e  $W$  si dicono **supplementari** in  $E$ .

**Esempio 727** Dato  $V^2(\pi, O)$  e due suoi sottospazi  $r$  e  $s$  di dimensione 1 intersecantisi nel solo punto  $O$  (quindi  $r$  e  $s$  sono due rette passanti per  $O$  non coincidenti) si ha  $V^2(\pi, O) = r \oplus s$ .

**Esempio 728** Dato  $V^3(O)$ , sia  $r$  una retta passante per  $O$  e  $\pi$  un piano passante per  $O$  non contenente la retta  $r$ . Si ha:  $V^3(O) = r \oplus \pi$ .

**Esempio 729** Si consideri lo spazio vettoriale dei complessi  $C$  sul campo dei numeri reali. L'insieme  $R$  è un sottospazio vettoriale di  $C$ . L'insieme  $I$  dei numeri complessi aventi parte reale nulla è un sottospazio vettoriale di  $C$  (esercizio). Si verifica facilmente che si ha  $C = R \oplus I$ .

**Esercizio 730** Indichiamo con  $S(R, n)$  il sottospazio vettoriale di  $M(R, n, n)$  dato dalle matrici simmetriche. Quindi:

$$S(R, n) = \{A \in M(R, n, n) \mid A = {}^t A\}$$

Indichiamo con  $AS(R, n)$  l'insieme delle matrici antisimmetriche. Quindi:

$$AS(R, n) = \{A \in M(R, n, n) \mid A = -{}^t A\}$$

Dimostrare che  $AS(R, n)$  è un sottospazio vettoriale di  $M(R, n, n)$  e che si ha:

$$M(R, n, n) = S(R, n) \oplus AS(R, n)$$

**SUGGERIMENTO.** Provare prima per  $n = 2$ , poi per  $n = 3$ . Per dimostrare il caso generale, notare che, per ogni matrice  $A \in M(R, n, n)$ , si ha  $A + {}^t A \in S(R, n)$ ,  $A - {}^t A \in AS(R, n)$  e che  $2A = A + {}^t A + A - {}^t A$ .

**Nota 731** **ATTENZIONE.** Il teorema precedente non è generalizzabile ad ogni campo  $K$ . Si consideri, per esempio,  $K = Z_2$  e si determinino  $S(Z_2, 2)$  e  $AS(Z_2, 2)$ .

**Esercizio 732** Determinare quali condizioni bisogna assegnare ad un campo  $K$  perché si abbia:

$$M(K, n, n) = S(K, n) \oplus AS(K, n)$$

Ci chiediamo se, dato uno spazio vettoriale  $E$  di dimensione finita ed un suo sottospazio vettoriale  $V$ , esista un supplementare  $W$  di  $V$  in  $E$ . Studiamo innanzitutto i casi ovvi. Se  $V = E$ , allora il supplementare di  $V$  è il sottospazio nullo. Viceversa, il supplementare dello spazio nullo è lo spazio  $E$ . Ma cosa si può dire se  $V$  è un sottospazio proprio di  $E$ ? Vediamo qualche esempio. Dato  $V^2(\pi, O)$ , un supplementare di una retta  $r$  passante per  $O$  è una qualsiasi retta  $s$  passante per  $O$  non coincidente con  $r$ . Notiamo che di tali rette ne esiste più di una.

Consideriamo ora  $V^3(O)$  e una retta  $r$  passante per  $O$ . Un supplementare di  $r$  è un qualsiasi piano  $\pi$  passante per  $O$  non contenente la retta  $r$ . Anche in questo caso vi sono molti supplementari. Quindi, in generale, *esiste più di un supplementare*.

Noi vogliamo dimostrare che ogni sottospazio vettoriale è dotato di supplementare. Per fare ciò abbiamo bisogno del seguente teorema.

**Teorema 733** [del completamento della base] Vedere [A.V.] Capitolo 2, teorema 7.21. oppure [V.C.P.] capitolo 2, teorema 5.6.  $\square$

**Teorema 734** Sia  $E$  uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia  $V$  un suo sottospazio vettoriale. Allora esiste almeno un supplementare di  $V$  in  $E$ .

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio. Suggerimento: usare il teorema di completamento di una base.  $\square$ .

**Esempio 735** Dato lo spazio vettoriale  $R^3[x]$ , sia  $V$  il suo sottospazio avente come base  $\{p(x) = 1 + x + x^2\}$ . Vogliamo determinare un supplementare di  $V$ . Per fare ciò consideriamo la base canonica di  $R^3[x]$  e consideriamo la matrice  $A$  avente come prima colonna le coordinate del vettore  $p(x)$  e come seconda, terza e quarta colonna le coordinate dei tre vettori della base canonica di  $R^3[x]$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il minore formato dalle prime tre colonne è invertibile.

Quindi  $\{1 + x + x^2, 1, x\}$  è una base di  $R^3[x]$ .

Il sottospazio avente come base  $\{1, x\}$  è supplementare di  $V$ . Con calcoli analoghi si può vedere che anche il sottospazio avente come base  $\{x, x^2\}$  è supplementare di  $V$ .

**Esercizio 736** Considerare lo spazio vettoriale  $R^4[x]$ . Sia  $V$  il suo sottospazio vettoriale dato da:

$$V = \{p(x) \in R^4[x] \mid p(1) = p(5) = 0\}$$

Determinare un supplementare di  $V$ .

**Definizione 737** Sia  $E$  uno spazio vettoriale su un campo  $K$  e siano  $V_1, \dots, V_p$  sottospazi vettoriali di  $E$ . Si dice che un sottospazio  $U$  è **somma diretta** di  $V_1, \dots, V_p$ , in simboli:

$$U = V_1 \oplus \dots \oplus V_p$$

se, dato comunque un vettore  $\mathbf{u} \in U$ , esiste una sola  $p$ -upla di vettori  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$  con  $\mathbf{v}_1 \in V_1, \dots, \mathbf{v}_p \in V_p$  tali che  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_p$ .

**Nota 738** Il teorema 723 ci assicura che, nel caso di  $p = 2$ , quest'ultima definizione di somma diretta coincide con la definizione data in precedenza.

**Teorema 739** [generalizzazione del teorema 724] Sia  $E$  uno spazio vettoriale su un campo  $K$  e siano  $V_1, \dots, V_p$  suoi sottospazi vettoriali di dimensione finita. Sia:

$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{q_1}\}$  una base di  $V_1$ . Sia  $\{\mathbf{e}_{q_1+1}, \dots, \mathbf{e}_{q_2}\}$  una base di  $V_2$ , ... e sia  $\{\mathbf{e}_{q_{p-1}+1}, \dots, \mathbf{e}_{q_p}\}$  una base di  $V_p$ .

Allora:

$U = V_1 \oplus \dots \oplus V_p$  se e solo se  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{q_1}, \dots, \mathbf{e}_{q_{p-1}+1}, \dots, \mathbf{e}_{q_p}\}$  è una base di  $U$ .

DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio.  $\square$ .

**Esempio 740** Dato lo spazio vettoriale  $V^3(O)$  siano  $r, r', r''$  tre rette passanti per  $O$  non complanari. Si ha  $V^3(O) = r \oplus r' \oplus r''$ .

**Esercizio 741** Determinare tre sottospazi vettoriali non nulli  $V_1, V_2, V_3$  di  $R^5$  tali che si abbia  $R^5 = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ .

## 5.6 Cambio di base

Iniziamo con un esercizio.

**Esercizio 742** Si consideri lo spazio vettoriale  $R^3[x]$ . Si consideri la sua base canonica e la base  $\{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ . Determinare le coordinate del vettore  $3+5x+7x^2$  relative alle due basi.

Svolto l'esercizio, ci si accorge che le coordinate del vettore cambiano al variare della base. Ci si chiede che relazione intercorra tra le coordinate relative a diverse basi di uno stesso vettore.

**Teorema 743** [Relazione tra le coordinate] Sia  $V$  uno spazio vettoriale e sia  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  una sua base. Per ogni vettore  $\mathbf{v} \in V$  si ha:

$$\mathbf{v} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$$

Scriviamo, utilizzando il prodotto righe per colonne tra matrici, la formula precedente nel seguente modo:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Notare che si è considerato  $(\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n)$  come una matrice ad una riga e  $n$  colonne i cui elementi sono vettori di  $V$ .

Consideriamo ora un'altra base  $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$  di  $V$ . Si ha:

$$\mathbf{v} = x'_1 \mathbf{e}'_1 + \dots + x'_n \mathbf{e}'_n$$

Con il simbolismo compatto:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{e}'_1 \dots \mathbf{e}'_n) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Vogliamo determinare la relazione intercorrente tra le coordinate

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

relative alla base  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  e le coordinate

$$X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

relative alla base  $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ .

Sia  $M$  la matrice avente come colonne le coordinate dei vettori  $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$  relative alla base  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ . Si ha cioè, utilizzando il simbolismo matriciale sopra introdotto:

$$(\mathbf{e}'_1 \dots \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n)M$$

Poiché i vettori  $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$  sono linearmente indipendenti, la matrice  $M$  è invertibile. Essa viene chiamata **matrice di passaggio** dalla base  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  alla base  $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ . Dalla formula precedente segue:

$$(\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}'_1 \dots \mathbf{e}'_n)M^{-1}$$

e quindi la matrice  $M^{-1}$  è la matrice di passaggio dalla base  $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$  alla base  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ . Si ha, sfruttando le formule precedenti:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{e}'_1 \dots \mathbf{e}'_n) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n)M \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Quindi

$$M \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

sono le coordinate del vettore  $\mathbf{v}$  relative alla base  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ . Per l'unicità delle coordinate relative ad una stessa base si ha:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

cioè:

$$X = MX'$$

da cui segue anche:

$$X' = M^{-1}X$$

Queste sono le formule che cercavamo.

**Esercizio 744** Si risolva l'esercizio 742 utilizzando le formule appena trovate.

**Esercizio 745** Si consideri in  $R^3$  la retta  $x = y = 2z$  e il piano  $x - 2y + z = 0$ . Si fissi una base di  $R^3$  formata da un vettore appartenente alla retta e da due vettori appartenenti al piano. Determinare le coordinate di  $(3, 5, 1)$  relative a questa base.

**Esercizio 746** Si consideri in  $R^3[x]$  la base di Lagrange relativa ai punti 1, 2, 3. Si determinino le coordinate, relative a questa base di Lagrange, del polinomio  $1 + x + 2x^2$ .

**Esercizio 747** Si consideri in  $R^3[x]$  la base di Lagrange relativa ai punti 1, 2, 3. Si determinino le coordinate, relative alla base canonica, del polinomio avente  $(1, 1, 2)$  come coordinate relative alla base di Lagrange.

**Esercizio 748** Si consideri la base  $\{1 + i, 3 - i\}$  dello spazio vettoriale  $C$  sui reali. Determinare le coordinate relative a tale base del numero complesso  $2 + 7i$ .

**Nota 749** Nel teorema 692 abbiamo visto come scegliere tra  $r$  vettori  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  il massimo numero di vettori linearmente indipendenti. Si considera la matrice  $A$  avente come colonne le coordinate degli  $r$  vettori relative ad una base  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  dello spazio vettoriale ambiente. Si calcola il rango di  $A$  e si scelgono i vettori le cui coordinate servono a formare un minore invertibile di  $A$  di rango massimo. Supponiamo ora di determinare il rango di  $A$  utilizzando l'algoritmo di Gauss descritto nel paragrafo 4.9. Determiniamo cioè una matrice  $A'$  equivalente per righe alla matrice  $A$ . Abbiamo visto nel paragrafo 4.9 che allora si ha  $A' = K \cdot A$ , dove  $K$  è una matrice invertibile. Ma allora, per il teorema 743, abbiamo che la matrice  $A'$  ha come colonne le coordinate dei vettori  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  relative alla base  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)K^{-1}$ . Ma ora è facile estrarre dai vettori  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  il massimo numero di vettori linearmente indipendenti. Basta scegliere i vettori le cui coordinate corrispondono alle colonne della matrice  $A'$  in cui vi sono gli scalini (dimostrare ciò).

Si considerino, per esempio, i seguenti vettori di  $R^3$ :

$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 2)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (2, 0, 4)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (2, 1, 4)$ ,  $\mathbf{v}_4 = (1, 3, 2)$ . Vogliamo estrarre da questi il massimo numero di vettori linearmente indipendenti utilizzando l'algoritmo di Gauss. Consideriamo allora la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Si verifica subito che si ha  $A' = L_{-2}(3, 1) \cdot A$ , con

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La prima e la terza colonna (colonne degli scalini) sono linearmente indipendenti. Poiché la matrice  $A'$  ha come colonne le coordinate dei 4 vettori di cui sopra relative alla base  $\{(1, 0, 2), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ , abbiamo che il primo e il terzo vettore sono linearmente indipendenti.

## 5.7 Spazio vettoriale quoziente

**Definizione 750** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $K$  e sia  $\sim$  una relazione di equivalenza in  $V$ . La relazione di equivalenza si dice **compatibile** con le operazioni date in  $V$  se sono verificate le seguenti condizioni:

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{v}', \mathbf{w} \sim \mathbf{w}' \implies \mathbf{v} + \mathbf{w} \sim \mathbf{v}' + \mathbf{w}'$$

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{v}' \implies k\mathbf{v} \sim k\mathbf{v}' \quad \forall k \in K$$

**Teorema 751** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $K$  e sia  $\sim$  una relazione di equivalenza compatibile con le operazioni in  $V$ . Chiamiamo **operazioni indotte** su  $V/\sim$  dalle operazioni di addizione e di moltiplicazione per uno scalare su  $V$  le seguenti operazioni:

$$[\mathbf{v}]_{\sim} + [\mathbf{w}]_{\sim} = [\mathbf{v} + \mathbf{w}]_{\sim}$$

$$k[\mathbf{v}]_{\sim} = [k\mathbf{v}]_{\sim}$$

- 1) Queste operazioni sono ben definite.
- 2) L'insieme  $V/\sim$  con le operazioni appena definite è uno spazio vettoriale su  $K$ .

DIMOSTRAZIONE. 1) Lasciata per esercizio.

2) Il fatto che  $V/\sim$  (+) sia un gruppo abeliano deriva dall'analogo teorema visto nel caso dei gruppi. Si lascia come esercizio la dimostrazione delle altre proprietà.  $\square$

**Teorema 752** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $K$  e sia  $V'$  un suo sottospazio vettoriale. Sia  $\sim$  la relazione di equivalenza di  $V$  definita da:

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{v}' \iff \mathbf{v} - \mathbf{v}' \in V'$$

Questa relazione di equivalenza è compatibile con le operazioni definite in  $V$ . L'insieme  $V/\sim$  ha come elementi le classi laterali relative a  $V'$ :

$$[\mathbf{v}]_{\sim} = \mathbf{v} + V'$$

Le operazioni indotte su  $V/\sim$  sono:

$$(\mathbf{v} + V') + (\mathbf{w} + V') = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + V'$$

$$k(\mathbf{v} + V') = (k\mathbf{v}) + V' \quad \forall k \in K$$

Si ha inoltre che  $V/\sim$  con le operazioni appena definite è uno spazio vettoriale. DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio.  $\square$

## 5.8 Varietà affini

Sia  $V'$  un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale  $V$  e sia data in  $V$  la relazione di equivalenza vista nella proposizione precedente.

Dalla proposizione precedente segue che l'insieme  $V/\sim$  con le operazioni indotte è uno spazio vettoriale. Tale spazio vettoriale viene indicato con il simbolo  $V/V'$ . Abbiamo visto che si ha:

$$[\mathbf{v}]_{\sim} = \mathbf{v} + V'$$

Abbiamo chiamato l'insieme  $\mathbf{v} + V'$  classe laterale di  $\mathbf{v}$  relativa a  $V'$ . Nel caso degli spazi vettoriali di solito si usa il nome di **varietà affine passante per  $\mathbf{v}$  parallela a  $V'$** . La ragione di tale nome sarà chiara una volta visti i prossimi tre esempi.

**Definizione 753** Si definisce **dimensione** della varietà affine  $\mathbf{v}_0 + V'$  la dimensione del sottospazio vettoriale  $V'$

**Esempio 754** Si consideri lo spazio vettoriale  $V^2(\pi, O)$  dei vettori appartenenti ad un piano  $\pi$  aventi origine in un punto  $O$  di  $\pi$ . Sia  $V'$  un suo sottospazio vettoriale di dimensione uguale a 1. Sappiamo che  $V'$  è formato da tutti i vettori aventi il punto finale su una retta  $r$  passante per  $O$ . Dato un vettore  $\mathbf{v}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ , si verifica facilmente (pensare alla regola del parallelogramma) che l'insieme  $\mathbf{v}_0 + V'$  è formato da tutti i vettori  $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$  tali che  $P$  appartiene alla retta  $r'$  passante per  $P_0$  e parallela a  $r$ . Da tutto ciò segue che gli elementi di  $V^2(\pi, O)/V'$  sono le rette parallele alla retta  $r$ . Sia ora  $\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{OP_1}$  una base di  $V'$  (quindi  $O \neq P_1 \in r$ ). Allora i vettori di  $\mathbf{v}_0 + V'$  sono tutti e soli i vettori del tipo:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + t\mathbf{v}_1$$

Questa equazione è detta **equazione vettoriale** di  $\mathbf{v}_0 + V'$ . Se poi fissiamo una base:

$$\{\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OU_1}, \mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OU_2}\}$$

di  $V^2(\pi, O)$  (cioè un sistema di riferimento di  $\pi$  con origine in  $O$ ), considerando le coordinate  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$  di  $\mathbf{v}_0$  e di  $\mathbf{v}_1$  rispettivamente relative alla base data, l'equazione vettoriale diventa:

$$\begin{cases} x = x_0 + tx_1 \\ y = y_0 + ty_1 \end{cases}$$

che sono le ben note **equazioni parametriche di una retta** in un piano.

**Esempio 755** Si consideri lo spazio vettoriale  $V^3(O)$  dei vettori di uno spazio aventi origine in un punto  $O$ . Sia  $W$  un suo sottospazio vettoriale di dimensione uguale a 1. Anche in questo caso  $W$  è formato da tutti i vettori aventi il punto finale su una retta  $r$  passante per  $O$ . Dato un vettore  $\mathbf{v}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ , si ha che l'insieme  $\mathbf{v}_0 + W$  è formato da tutti i vettori  $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$  tali che  $P$  appartiene alla

retta  $r'$  passante per  $P_0$  e parallela a  $r$ . Quindi  $V^3(O)/W$  è formato dalle rette parallele alla retta  $r$ . Come nel caso precedente si ha l'equazione vettoriale di  $\mathbf{v}_0 + V'$ :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + t\mathbf{v}_1$$

Fissata una base  $\{\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OU_1}, \mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OU_2}, \mathbf{e}_3 = \overrightarrow{OU_3}\}$  di  $V^3(O)$  (cioè un sistema di riferimento con origine in  $O$ ), considerando le coordinate  $(x_0, y_0, z_0)$  e  $(x_1, y_1, z_1)$  di  $\mathbf{v}_0$  e di  $\mathbf{v}_1$  rispettivamente relative alla base data, l'equazione vettoriale diventa:

$$\begin{cases} x = x_0 + tx_1 \\ y = y_0 + ty_1 \\ z = z_0 + tz_1 \end{cases}$$

che sono le ben note **equazioni parametriche di una retta** nello spazio.

**Esempio 756** Si consideri lo spazio vettoriale  $V^3(O)$ . Sia  $V'$  un suo sottospazio vettoriale di dimensione uguale a 2. Esso è formato da tutti i vettori aventi il punto finale su un piano  $\pi$  passante per  $O$ . Dato un vettore  $\mathbf{v}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ , si ha che l'insieme  $\mathbf{v}_0 + V'$  è formato da tutti i vettori  $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$  tali che  $P$  appartiene al piano  $\pi'$  passante per  $P_0$  e parallelo a  $\pi$ . Quindi  $V^3(O)/V'$  è formato dai piani paralleli al piano  $\pi$ .

Sia ora

$$\{\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{OP_1}, \mathbf{v}_2 = \overrightarrow{OP_2}\}$$

una base di  $V'$ . Allora i vettori di  $\mathbf{v}_0 + V'$  sono tutti e soli i vettori del tipo:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2$$

Fissata una base  $\{\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OU_1}, \mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OU_2}, \mathbf{e}_3 = \overrightarrow{OU_3}\}$  di  $V^3(O)$ , considerando le coordinate  $(x_0, y_0, z_0)$ ,  $(x_1, y_1, z_1)$  e  $(x_2, y_2, z_2)$  di  $\mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{v}_1$  e di  $\mathbf{v}_2$  rispettivamente, l'equazione vettoriale diventa:

$$\begin{cases} x = x_0 + t_1x_1 + t_2x_2 \\ y = y_0 + t_1y_1 + t_2y_2 \\ z = z_0 + t_1z_1 + t_2z_2 \end{cases}$$

che sono le ben note **equazioni parametriche di un piano**.

**Esempio 757** Si consideri un sistema di  $p$  equazioni lineari a coefficienti in un campo  $K$  in  $q$  incognite  $S : A \cdot X = B$  avente soluzioni. L'insieme  $\text{Sol}(S)$  delle soluzioni di  $S$  è una varietà affine di  $K^q$ . La sua dimensione è uguale a  $q - \text{rk}(A)$ .

**Esercizio 758** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $K$  e sia  $\mathbf{v}_0 + W$  una sua varietà affine. Dimostrare che  $\mathbf{v}_0 + W$  è un sottospazio vettoriale di  $V$  se e solo se  $\mathbf{v}_0 \in W$ .

## 5.9 Bibliografia

1) **G.Accascina, V.Villani** *Esercizi di algebra lineare*, ETS.

Nei capitoli 2 e 4 sono proposti e risolti molti esercizi sugli spazi vettoriali.

2) **I.Cattaneo Gasparini** *Strutture algebriche, operatori lineari*, Veschi.

Il terzo capitolo è dedicato agli spazi vettoriali.

3) **I.Cattaneo Gasparini, G. Selmi** *Esercizi di algebra lineare con applicazioni alle funzioni di matrici e ai sistemi differenziali*, Veschi.

Il secondo capitolo contiene molti esercizi sugli spazi vettoriali.

4) **P.Maroscia** *Problemi di geometria*, Masson editoriale Veschi.

Nel quinto capitolo sono proposti e risolti molti esercizi sugli spazi vettoriali.

5) **S.Abeasis** *Algebra lineare e geometria*, Zanichelli.

Il quinto capitolo è dedicato agli spazi vettoriali.

6) **F.Brogia, E.Fortuna, D.Luminati** *Problemi risolti di algebra lineare* Decibel, Padova.

Si tratta di 152 problemi “... complessi da un punto di vista teorico, che potessero servire allo studente, dopo i preliminari e necessari esercizi calcolativi, come aiuto al completamento della propria preparazione (estratto dalla introduzione).