

# **- Scienza delle Costruzioni -**

Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica V.O.

(Prof.Stefano Bennati)

Prova Scritta del 11/01/2003

**Prova Completa**

*(Praticò Andrea)*

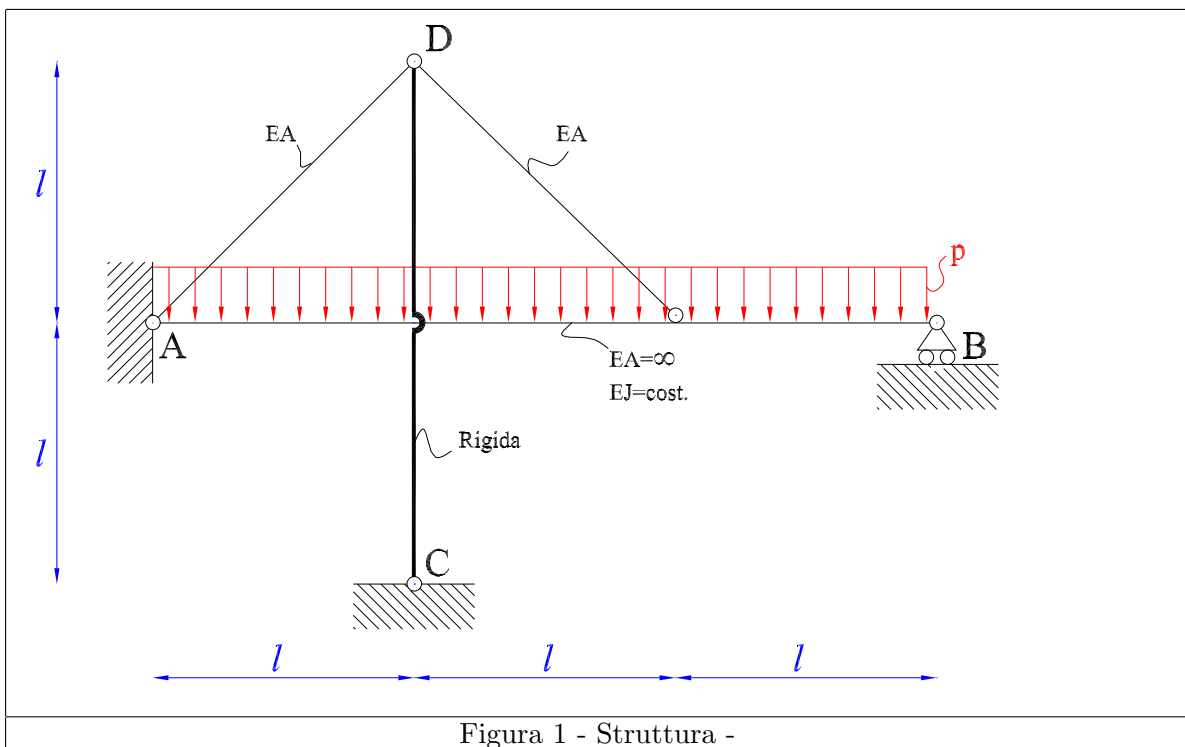
30 gennaio 2003

# Traccia

## Problema 1

Nel problema di figura, la trave verticale  $CD$  è rigida, la trave di impalcato  $AB$  è inestensibile. Scelto lo sforzo normale dell'asta  $DF$  come incognita iperstatica  $X$ :

- disegnare i sistemi  $F_0$  ed  $F_1$  e determinare le espressioni delle CdS utili ai fini dei calcoli successivi;
- calcolare i coefficienti dell'equazione di elasticità e, conseguentemente, il valore incognito di  $X$  [suggerimento: porre per semplicità,  $Al^2 = J$ ];
- calcolare la rotazione della trave  $CD$ .



## Problema 2

Considerare lo stesso problema della figura precedente nel caso in cui la cerniera  $F$  interrompa la trave di impalcato  $AB$ ; disegnare, inoltre, i relativi diagrammi quotati di  $T$  e di  $M$ .

### Problema 3

Se ora la cerniera in  $A$  viene rimossa, la struttura diventa labile:  
assunto come parametro l'angolo di rotazione dell'asta  $CD$ ,  $\theta_1$ , determinare in funzione di esso lo spostamento virtuale (di tipo rigido infinitesimo per ogni singolo elemento) compatibile con tutti i vincoli.

# Soluzione Problema 1

Sistema  $F_0$

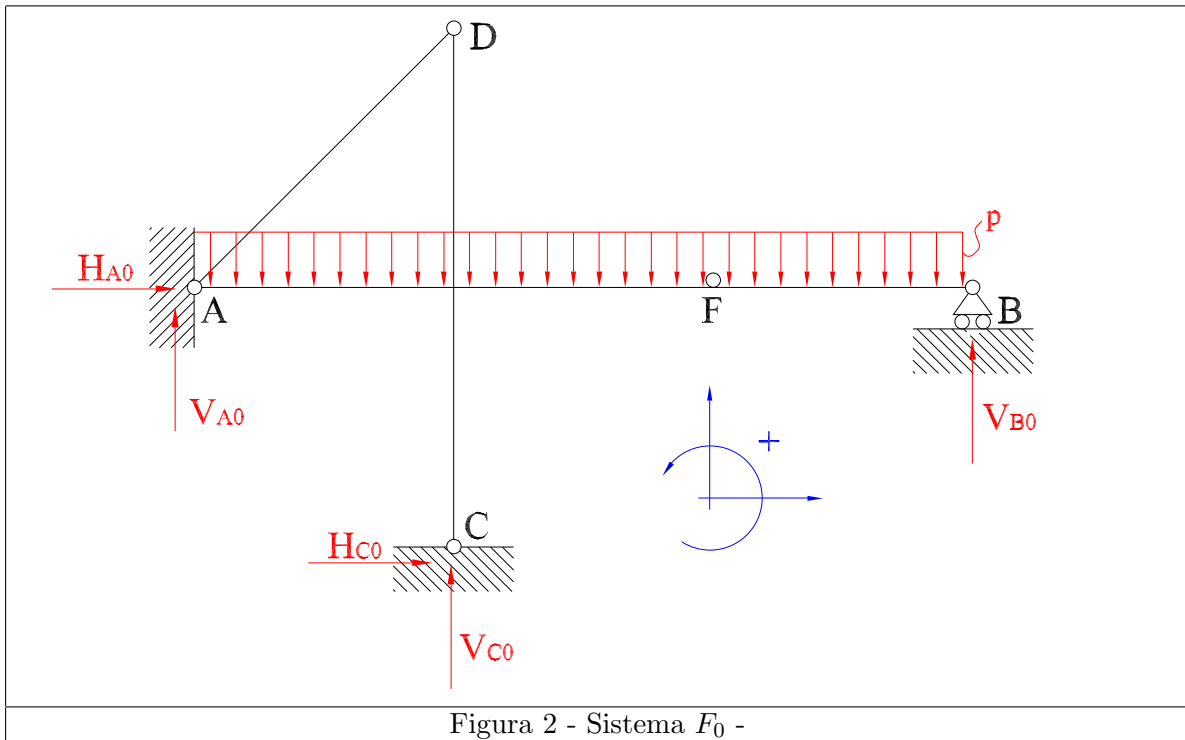


Figura 2 - Sistema  $F_0$  -

Equilibrio Globale:

$$H_{A0} + H_{C0} = 0$$

$$V_{A0} + V_{B0} + V_{C0} = 3pl$$

$$(C) \quad -V_{A0} \cdot l - H_{A0} \cdot l + V_{B0} \cdot 2l - 3pl \left( \frac{3l}{2} - l \right) = 0$$

Equazione Ausiliaria: rotazione asta  $CD$  intorno a  $D$

$$H_{C0} \cdot 2l = 0 \Rightarrow H_{C0} = 0 \Rightarrow H_{A0} = 0$$

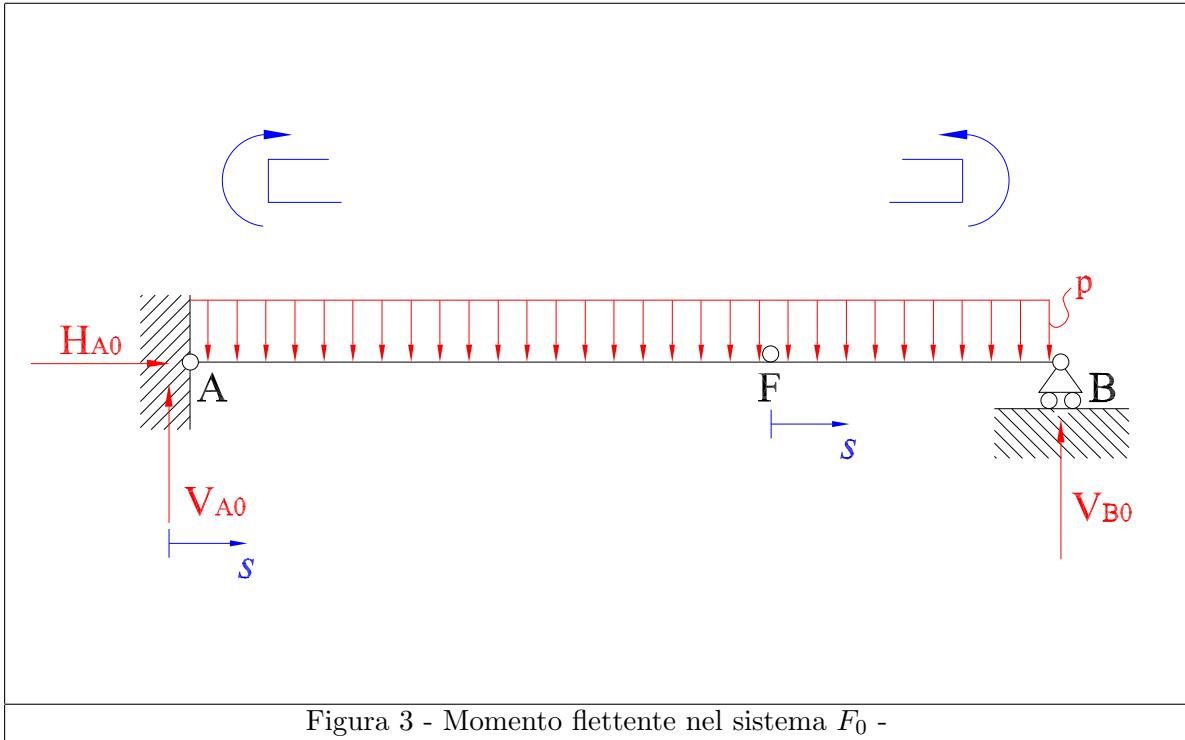
Equazione Ausiliaria: rotazione asta  $AB$  intorno ad  $A$

$$-3pl \cdot \frac{3l}{2} + V_{B0} \cdot 3l = 0 \Rightarrow V_{B0} = \frac{3}{2}pl$$

dalle precedenti equazioni si ricavano gli altri valori:

$$V_{A0} = V_{B0} = \frac{3}{2}pl \quad V_{C0} = 0$$

### Momento flettente trave $AB$



---


$$\text{AF} \quad 0 \leq s \leq 2l \quad M(s) = V_{A0} \cdot s - \frac{p}{2}s^2$$

$$\text{FB} \quad 0 \leq s \leq l \quad M(s) = V_{B0}(l - s) - \frac{p}{2}(l - s)^2$$


---

Sostituendo i valori delle reazioni vincolari:

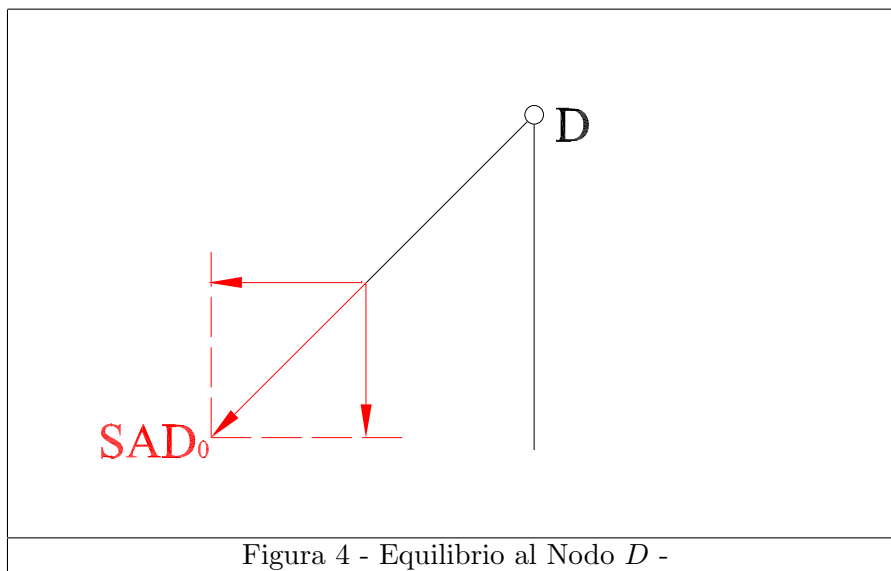
---


$$\text{AF} \quad 0 \leq s \leq 2l \quad M(s) = \frac{3}{2}pl \cdot s - \frac{p}{2}s^2$$

$$\text{FB} \quad 0 \leq s \leq l \quad M(s) = (l - s) \left[ \frac{3}{2}pl - \frac{p}{2}(l - s) \right]$$


---

### Sforzo Normale travi $AD$ e $DF$



$$S_{AD0} = 0 \quad S_{DF0} = 0$$

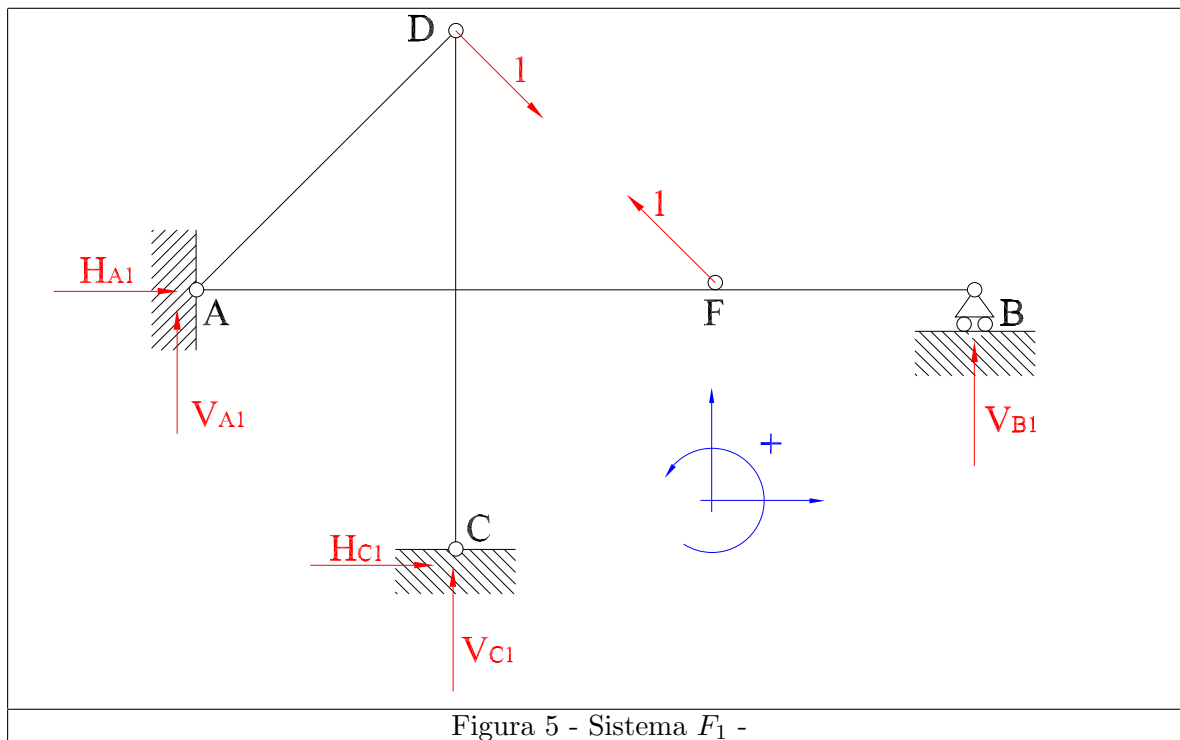
Risulta (banalmente):

---


$$AD \quad 0 \leq s \leq \sqrt{2}l \quad N(s) = 0$$

$$DF \quad 0 \leq s \leq \sqrt{2}l \quad N(s) = 0$$


---

Sistema  $F_1$ Figura 5 - Sistema  $F_1$  -

Equilibrio Globale:

$$H_{A1} + H_{C1} = 0$$

$$V_{A1} + V_{B1} + V_{C1} = 0$$

$$(C) \quad -V_{A1} \cdot l - H_{A1} \cdot l + V_{B1} \cdot 2l = 0$$

Equazione Ausiliaria: rotazione asta  $CD$  intorno a  $D$

$$H_{C1} \cdot 2l = 0 \Rightarrow H_{C1} = 0 \Rightarrow H_{A1} = 0$$

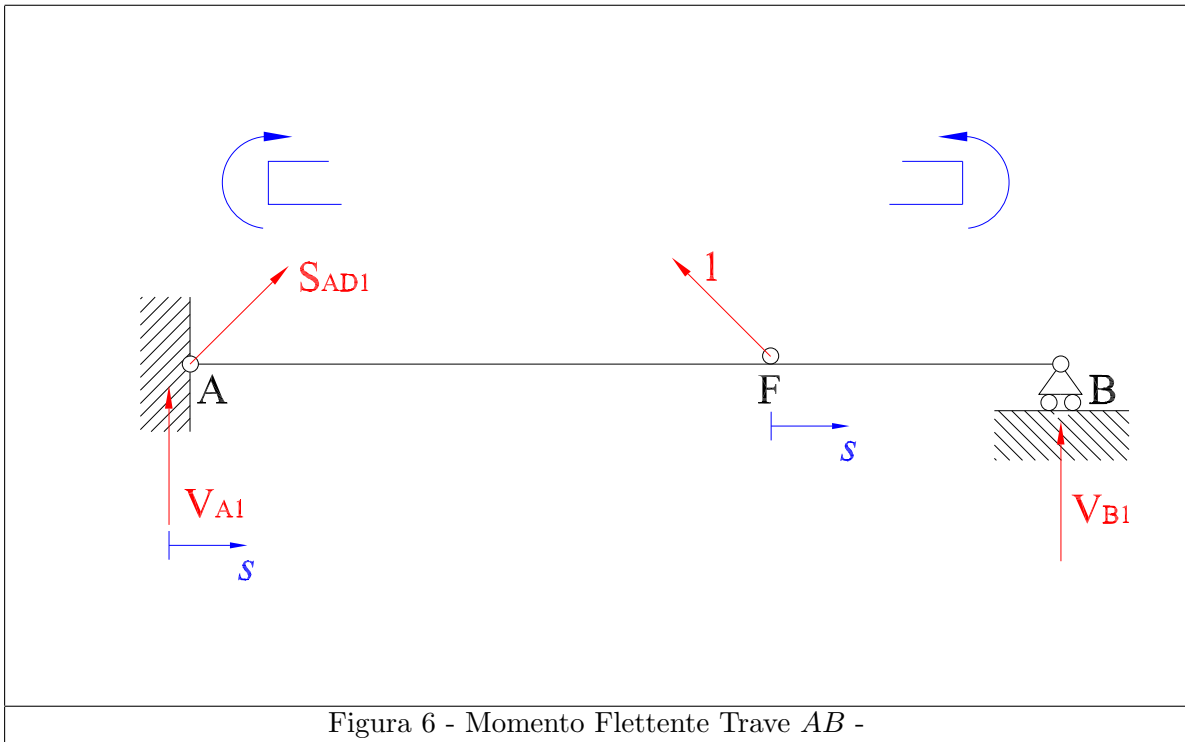
Equazione Ausiliaria: rotazione asta  $AB$  intorno ad  $A$

$$V_{B1} \cdot 3l + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2l = 0 \Rightarrow V_{B1} = -2\frac{\sqrt{2}}{3}$$

dalle precedenti equazioni si ricavano gli altri valori:

$$V_{A1} = 2V_{B1} = -2\frac{\sqrt{2}}{3} \quad V_{C1} = \sqrt{2}$$

# Momento flettente trave $AB$



---


$$\text{AF} \quad 0 \leq s \leq 2l \quad M(s) = V_{A1} \cdot s + \frac{S_{AD1}}{\sqrt{2}} \cdot s$$

$$\text{FB} \quad 0 \leq s \leq l \quad M(s) = V_{B1} \cdot (l - s)$$


---

Sostituendo i valori delle reazioni vincolari:

---

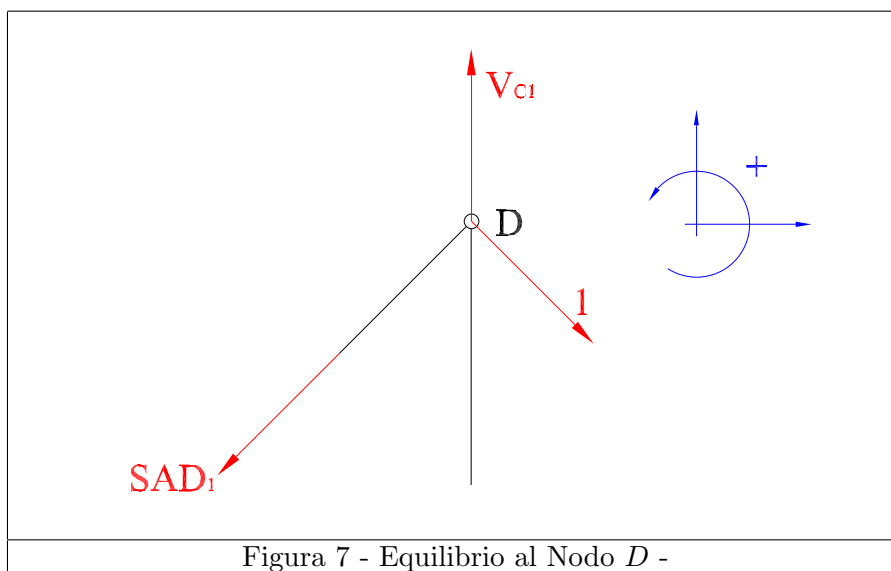

$$\text{AF} \quad 0 \leq s \leq 2l \quad M(s) = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot s + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot s$$

$$\text{FB} \quad 0 \leq s \leq l \quad M(s) = -(l - s) \frac{\sqrt{2}}{3}$$


---



### Sforzo Normale travi $AD$ e $DF$



$$-\frac{S_{AD1}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow S_{AD1} = 1$$

---


$$AD \quad 0 \leq s \leq \sqrt{2}l \quad N(s) = 1$$

$$DF \quad 0 \leq s \leq \sqrt{2}l \quad N(s) = 1$$


---

## Coefficienti di Influenza

	$M_0$	$M_1$	$M_0 \cdot M_1$	$M_1^2$
AF	$\frac{3}{2}pl \cdot s - \frac{p}{2} \cdot s^2$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \cdot s$	$\frac{p\sqrt{2}}{12}(s - 3l) \cdot s^2$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 \cdot s^2$
FB	$(l - s) \left[\frac{3}{2}pl - \frac{p}{2}(l - s)\right]$	$-(l - s)\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}(l - s)^2 \left[\frac{p}{2}(l - s) - \frac{3}{2}pl\right]$	$\frac{2}{9}(l - s)^2$

	$N_0$	$N_1$	$N_0 \cdot N_1$	$N_1^2$
AD	0	1	0	1
DF	0	1	0	1

$$\eta_{10} = \frac{1}{EJ} \left[ \int_0^{2l} \frac{p\sqrt{2}}{12}(s - 3l) \cdot s^2 ds + \int_0^l \frac{\sqrt{2}}{3}(l - s)^2 \left[ \frac{p}{2}(l - s) - \frac{3}{2}pl \right] ds \right]$$

$$\eta_{11} = \frac{1}{EJ} \left[ \int_0^{2l} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^2 \cdot s^2 ds + \int_0^l \frac{2}{9}(l - s)^2 ds \right] + \frac{2}{EA} \int_0^{\sqrt{2}l} ds$$

Integrando e semplificando, si ha:

$$\eta_{10} = -\frac{11\sqrt{2}}{24} \cdot \frac{pl^4}{EJ}$$

$$\eta_{11} = \frac{2}{9} \frac{l^3}{EJ} + 2\sqrt{2} \frac{l}{EA}$$

L'equazione di elasticità è:  $\eta_{10} + \eta_{11} \cdot X = 0$ ;

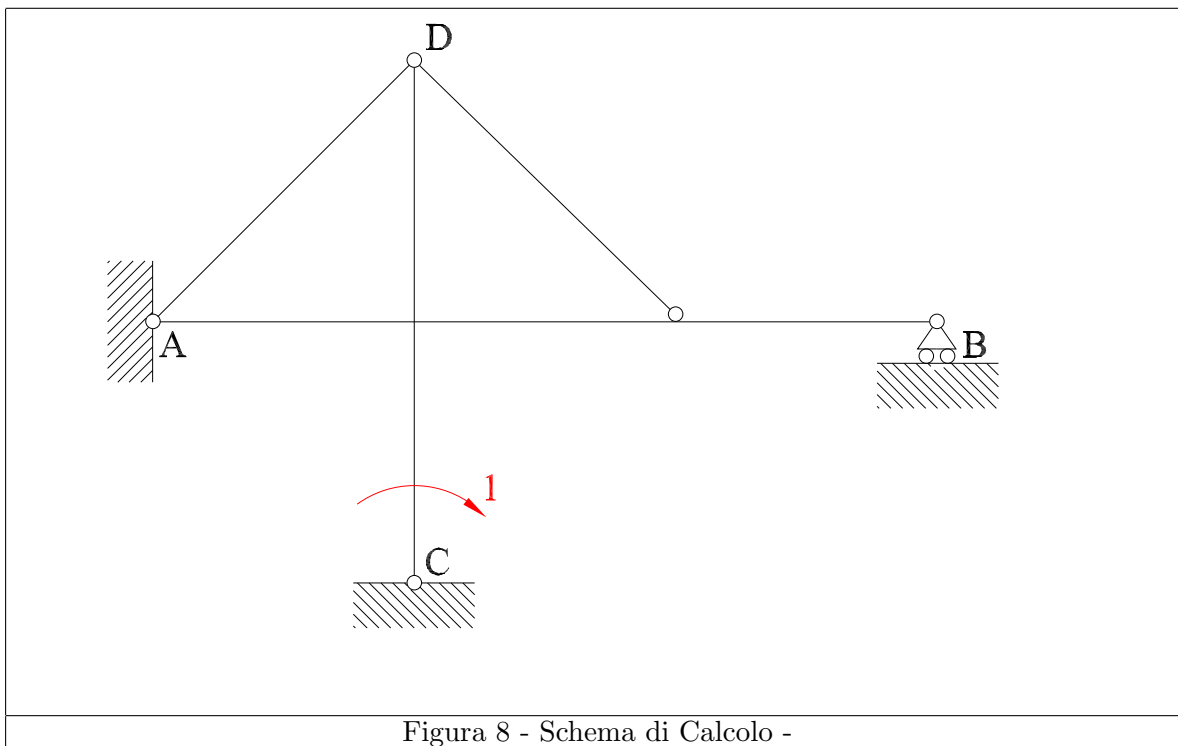
$$X = -\frac{\eta_{10}}{\eta_{11}} \Rightarrow \dots$$

$$X = \frac{\frac{11\sqrt{2}}{24} Al^2}{\frac{2}{9} Al^2 + 2\sqrt{2} J} \cdot pl$$

Effettuando la sostituzione:  $Al^2 = J$ , si ha:

$$X = \frac{\frac{11\sqrt{2}}{24}}{\frac{2}{9} + 2\sqrt{2}} \cdot pl \Rightarrow X = \left( \frac{297}{1288} - \frac{33\sqrt{2}}{2576} \right) \cdot pl \Rightarrow X = 0.2125 \cdot pl$$

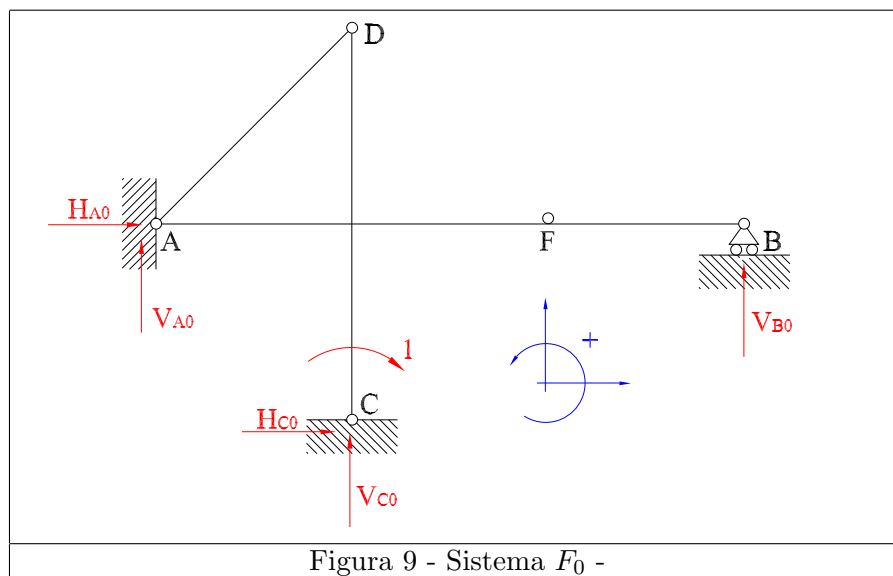
## Calcolo della Rotazione Trave $CD$



Per tale calcolo si impone un carico esploratore (coppia esploratrice) unitario agente sulla trave interessata. Tale coppia sottoporà l'intera struttura a delle Caratteristiche di Sollecitazione che bisogna determinare.

Tuttavia la struttura si ricorda essere iperstatica, quindi si riapplicherà il metodo delle forze per la determinazione delle suddette CdS, queste ultime saranno indicate con il pedice  $m$ : ( $M_m$   $N_m$   $T_m$ ).

### Sistema $F_0$



Equilibrio Globale:

$$H_{A0} + H_{C0} = 0$$

$$V_{A0} + V_{B0} + V_{C0} = 0$$

$$(C) \quad -1 - V_{A0} \cdot l - H_{A0} \cdot l + V_{B0} \cdot 2l = 0$$

Equazione Ausiliaria: rotazione asta  $CD$  intorno a  $D$

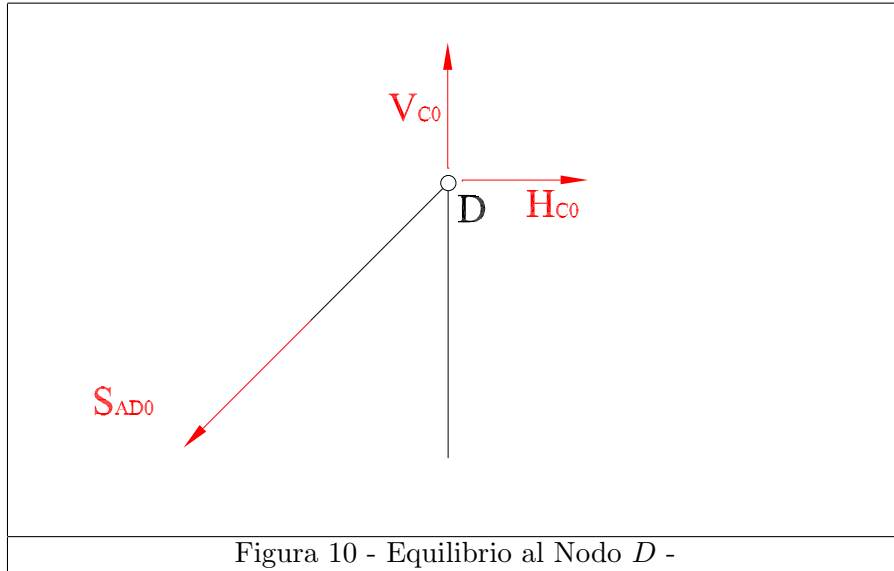
$$H_{C0} \cdot 2l - 1 = 0 \Rightarrow H_{C0} = \frac{1}{2l} \Rightarrow H_{A0} = -\frac{1}{2l}$$

Equazione Ausiliaria: rotazione asta  $AB$  intorno ad  $A$

$$V_{B0} \cdot 3l = 0 \Rightarrow V_{B0} = 0$$

dalle precedenti equazioni si ricavano gli altri valori:

$$V_{A0} = -\frac{1}{2l} \quad V_{C0} = \frac{1}{2l}$$



$$-\frac{S_{AD0}}{\sqrt{2}} + H_{C0} = 0 \Rightarrow S_{AD0} = \sqrt{2}H_{C0} = \frac{1}{\sqrt{2}l}$$

$$S_{DF0} = 0$$

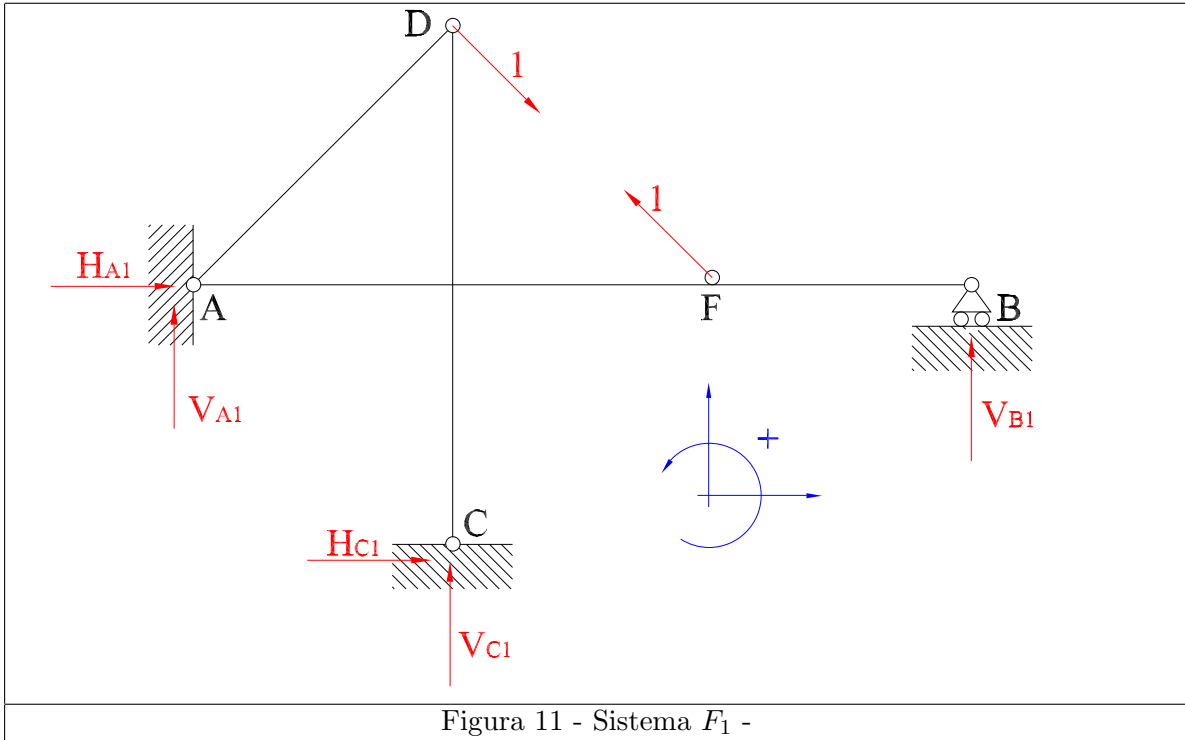
### Momento flettente trave $AB$

Il momento flettente nella trave  $AB$  è banalmente nullo, come si può facilmente notare dal fatto che  $V_{B0} = 0$

### Sforzo Normale travi $AD$ e $DF$

$$AD \quad 0 \leq s \leq \sqrt{2}l \quad N(s) = S_{AD0} = \frac{1}{\sqrt{2}l}$$

$$DF \quad 0 \leq s \leq \sqrt{2}l \quad N(s) = 0$$

Sistema  $F_1$ 

Le espressioni delle CdS sono del tutto identiche a quelle già determinate a suo tempo.

## Coefficienti di Influenza

	$M_0$	$M_1$	$M_0 \cdot M_1$	$M_1^2$	$N_0$	$N_1$	$N_0 \cdot N_1$	$N_1^2$
AF	0	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)s$	0	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 s^2$	-	-	-	-
FB	0	$-\frac{\sqrt{2}}{3}(l-s)$	0	$\frac{2}{9}(l-s)^2$	-	-	-	-
AD	0	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}l}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}l}$	1
DF	0	0	0	0	0	1	0	1

$$\eta_{10} = \frac{1}{EA} \int_0^{\sqrt{2}l} \frac{1}{\sqrt{2}l} ds = \frac{1}{EA}$$

$$\eta_{11} = \frac{1}{EJ} \int_0^{2l} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 s^2 ds + \frac{1}{EJ} \int_0^l \frac{2}{9}(l-s)^2 ds + \frac{2}{EA} \int_0^{\sqrt{2}l} ds$$

Semplificando, si ottiene:

$$\eta_{11} = \frac{2l^3}{9EJ} + \frac{2\sqrt{2}l}{EA}$$

$$X = -\frac{\eta_{10}}{\eta_{11}} \Rightarrow X = -\frac{9J}{2l(Al^2 + 9\sqrt{2}J)}$$

Ponendo  $Al^2 = J$ :

$$X = -\frac{9}{2l(1 + 9\sqrt{2})} \Rightarrow X = -0.3278 \cdot \frac{1}{l}$$

Ricordando che il Momento Flettente e lo Sforzo Normale effettivo è dato, rispettivamente da:  $M = M_0 + X \cdot M_1$   $N = N_0 + X \cdot N_1$ , si ha:

$$M_{AF}(s) = -0.3278 \frac{1}{l} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) s \Rightarrow M_{AF}(s) = 0.07726 \cdot \frac{s}{l}$$

$$M_{FB}(s) = 0.3278 \frac{1}{l} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} (l - s) \Rightarrow M_{FB}(s) = 0.1549 \cdot \frac{l - s}{l}$$

$$N_{AD}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}l} - 0.3278 \frac{1}{l} \Rightarrow N_{AD}(s) = 0.3793 \frac{1}{l}$$

$$N_{DF}(s) = -0.3278 \frac{1}{l}$$

	$M$	$M_m$	$M \cdot M_m$
AF	$-\frac{p}{2}s^2 + 1.45pl \cdot s$	$0.07726 \frac{s}{l}$	$0.003863(29l - 10s) \frac{ps^2}{l}$
FB	$(0.9pl + \frac{p}{2}s)(l - s)$	$0.1549 \frac{l-s}{l}$	$0.01549(l - s)^2(9l + 5s) \frac{p}{l}$

	$N$	$N_m$	$N \cdot N_m$
AD	$0.2125pl$	$0.3793 \frac{1}{l}$	$0.0806p$
DF	$0.2125pl$	$-0.3278 \frac{1}{l}$	$-0.06966p$

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \int_0^{2l} 0.003863(29l - 10s) \frac{ps^2}{l} ds + \frac{1}{EJ} \int_0^l 0.01549(l - s)^2(9l + 5s) \frac{p}{l} ds +$$

$$+ \frac{1}{EA} \int_0^{\sqrt{2}l} 0.0806p ds + \frac{1}{EA} \int_0^{\sqrt{2}l} -0.06966p ds$$

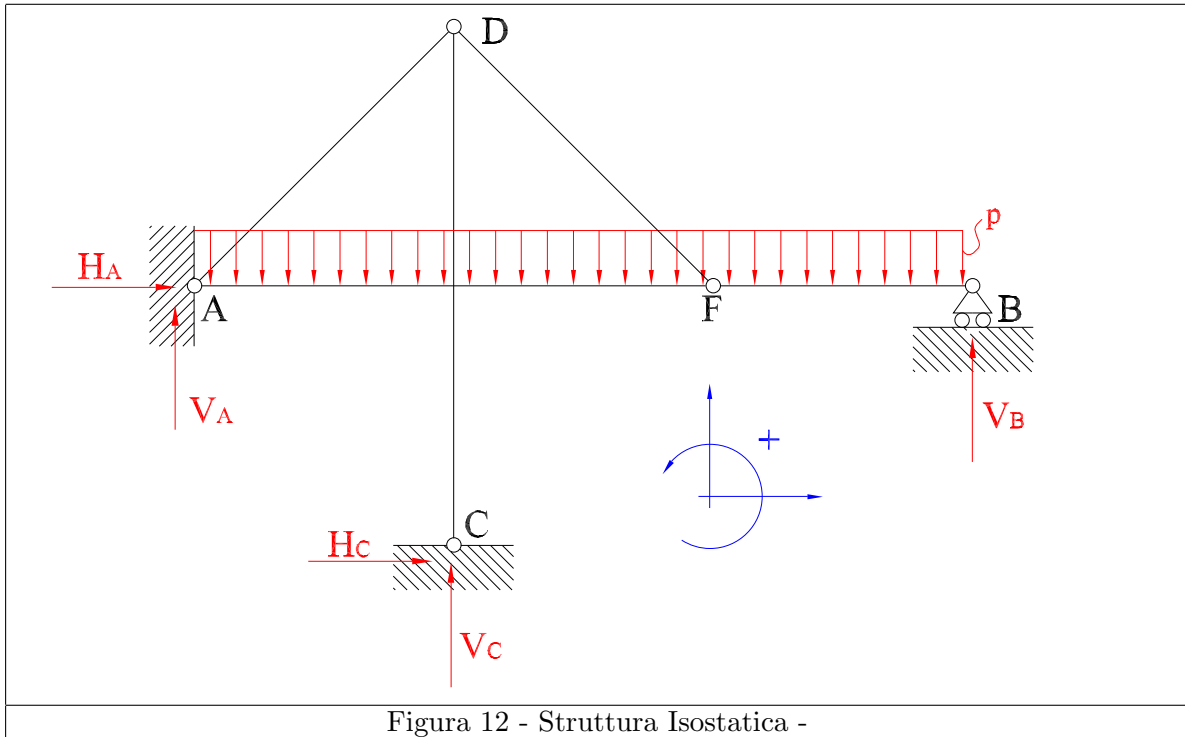
Svolgendo i calcoli e semplificando:

$$\varphi = \frac{1}{EJ}(0.1971)pl^3 + \frac{1}{EA}(0.01547)pl$$

Ponendo  $Al^2 = J$ , si ha:

$$\varphi = \frac{0.21257 \cdot p \cdot l}{EA}$$

# Soluzione Problema 2



SI noti come la struttura, con la sostituzione della cerniera in  $F$ , divenga Isostatica.

Equilibrio Globale:

$$H_A + H_C = 0$$

$$V_A + V_B + V_C = 3pl$$

$$(C) \quad -V_A \cdot l - H_A \cdot l + V_B \cdot 2l - 3pl \left( \frac{3l}{2} - l \right) = 0$$

Equazione Ausiliaria: rotazione asta  $CD$  intorno a  $D$

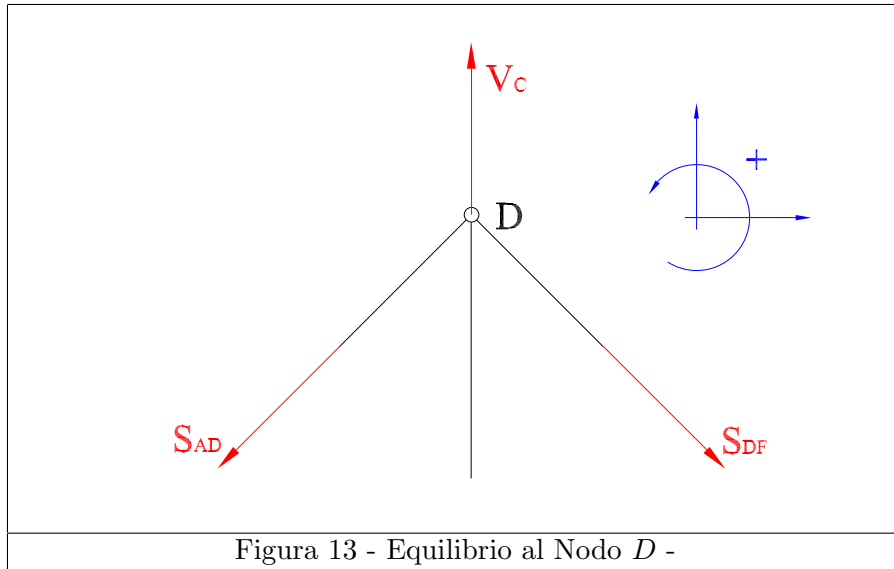
$$H_C = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

Equazione Ausiliaria: rotazione asta  $FB$  intorno ad  $F$

$$V_B \cdot l - pl \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow V_B = \frac{pl}{2}$$

dalle precedenti equazioni si ricavano gli altri valori:

$$V_A = -\frac{pl}{2} \quad V_C = 3pl$$



$$-\frac{S_{AD}}{\sqrt{2}} + \frac{S_{DF}}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow S_{AD} = S_{DF}$$

$$-\frac{S_{AD}}{\sqrt{2}} - \frac{S_{DF}}{\sqrt{2}} + V_C = 0 \Rightarrow S_{AD} = S_{DF} = \frac{3}{\sqrt{2}}pl$$



### Caratteristiche di Sollecitazione trave AB

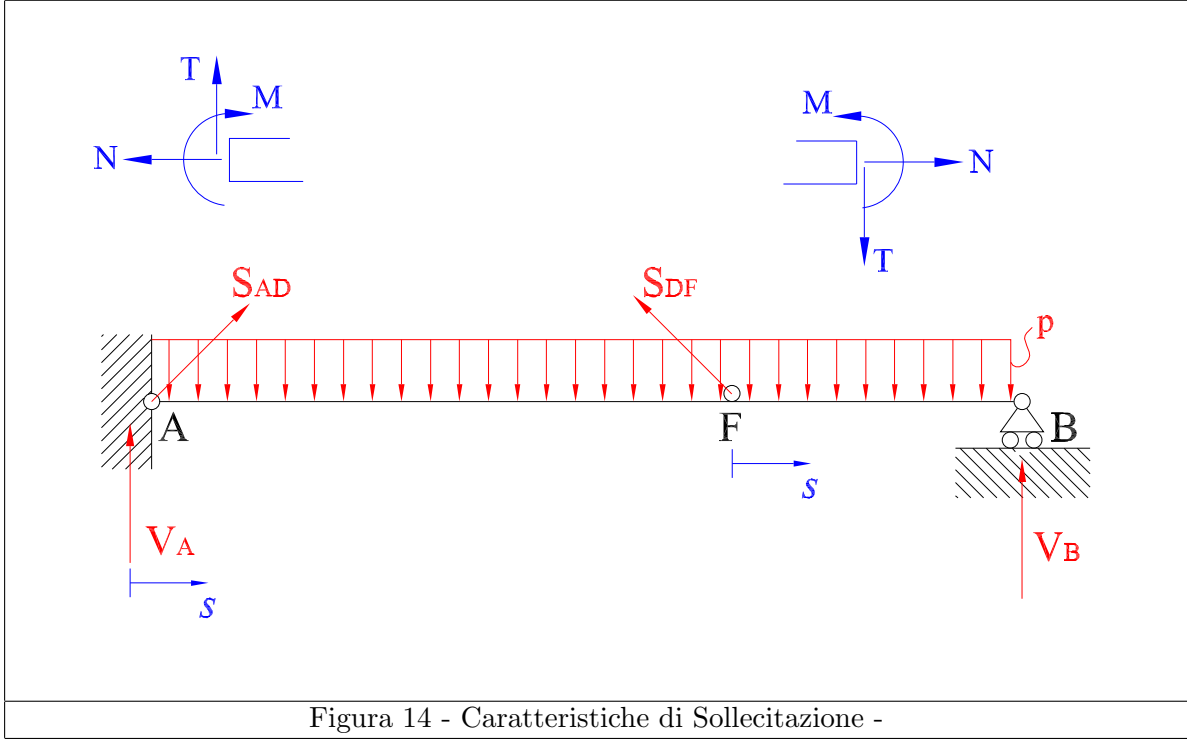


Figura 14 - Caratteristiche di Sollecitazione -

---


$$\text{AF} \quad 0 \leq s \leq 2l \quad N(s) = -\frac{S_{AD}}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad N(s) = -\frac{3}{2}pl$$

$$T(s) = \frac{S_{AD}}{\sqrt{2}} + V_A - ps \quad \Rightarrow \quad T(s) = p(l - s)$$

$$M(s) = \left( V_A + \frac{S_{AD}}{\sqrt{2}} \right) s - p \frac{s^2}{2} \quad \Rightarrow \quad M(s) = \left( ls - \frac{s^2}{2} \right) p$$


---

---

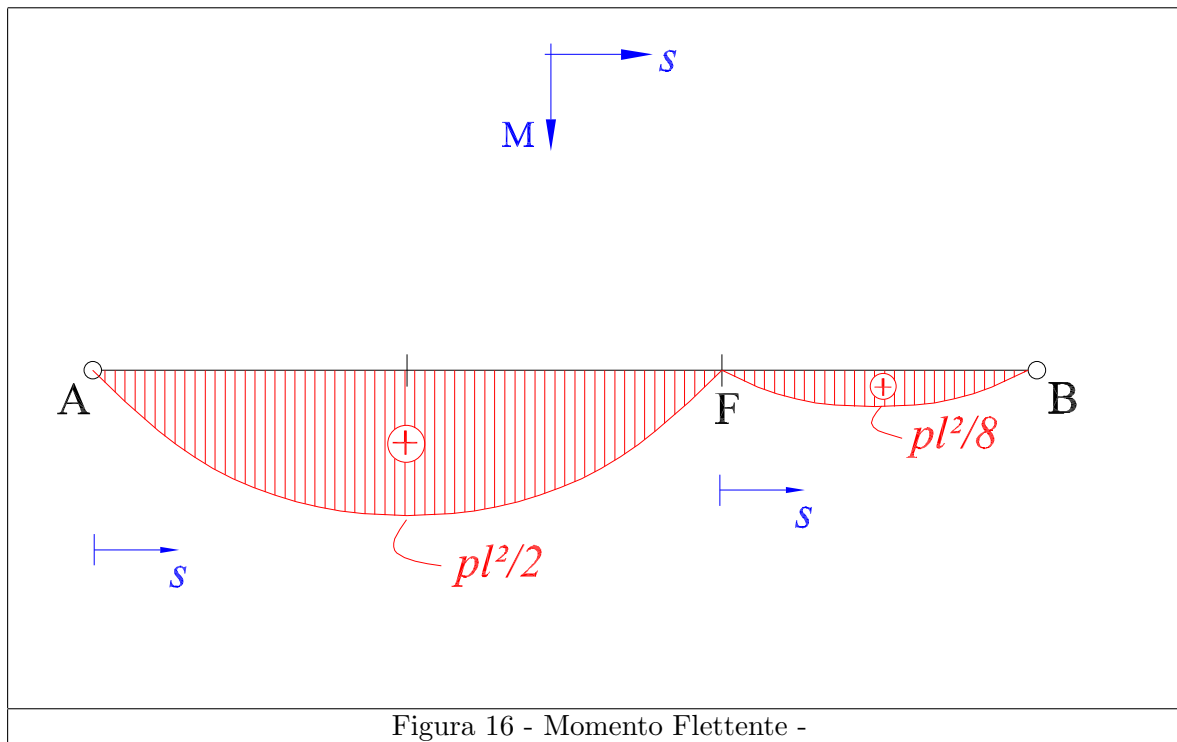
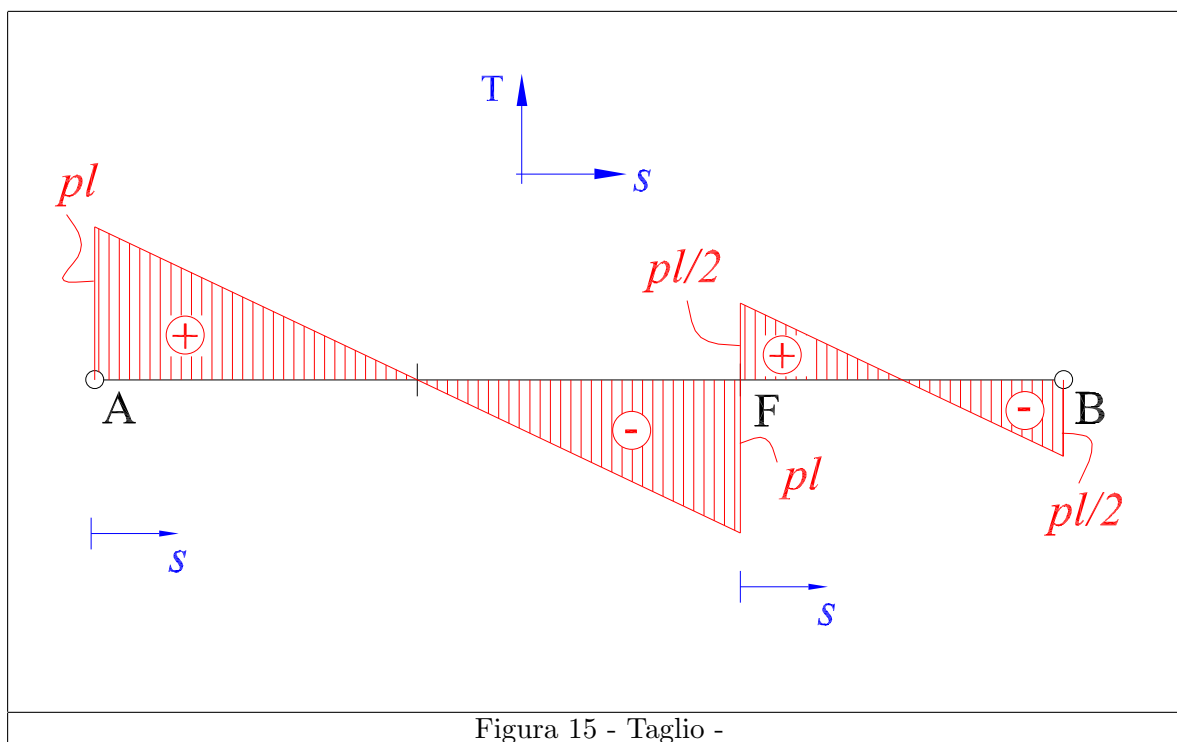

$$\text{FB} \quad 0 \leq s \leq l \quad N(s) = 0$$

$$T(s) = -V_B + p(l - s) \quad \Rightarrow \quad T(s) = p \left( \frac{l}{2} - s \right)$$

$$M(s) = (l - s) \cdot \left[ V_B - \frac{p(l-s)}{2} \right] \quad \Rightarrow \quad M(s) = (l - s) \frac{ps}{2}$$


---

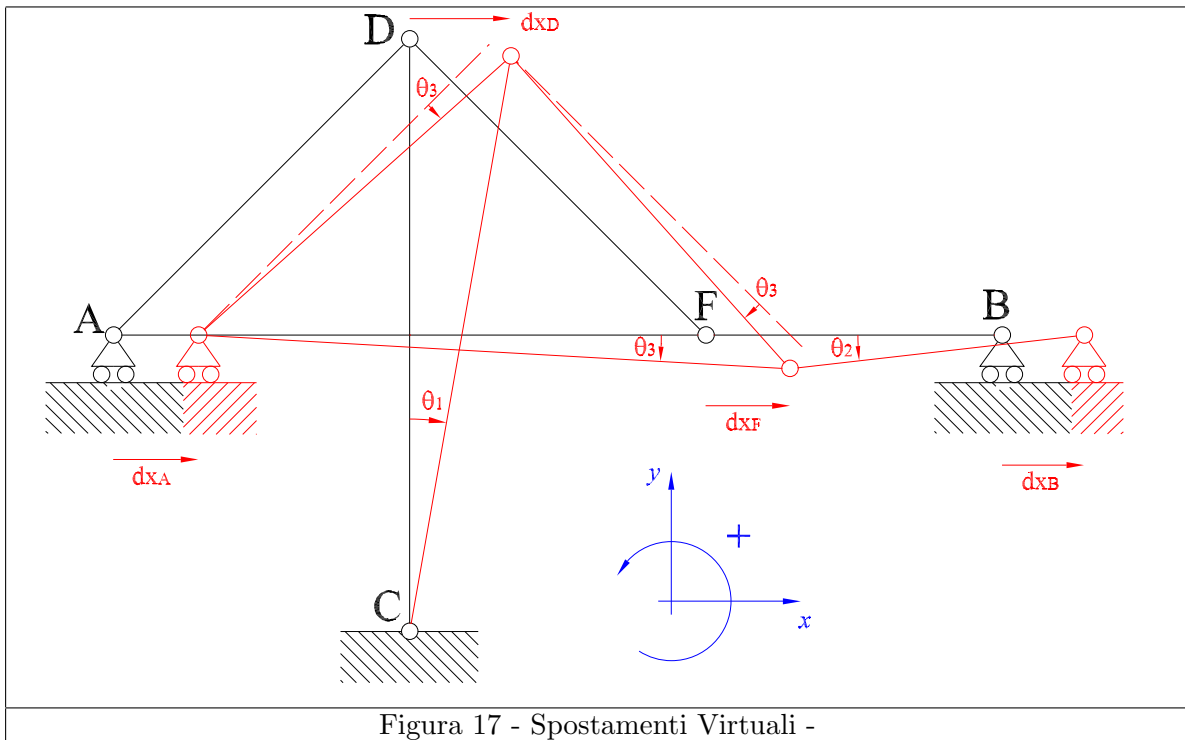
Si tracciano di Diagrammi quotati del Taglio e del Momento Flettente:



# Soluzione Problema 3

La domanda presenta un'ambiguità: se dalla struttura dell'esercizio 2 si eliminasse il vincolo esterno in  $A$ , la struttura risulterebbe 2 volte labile, quindi non sarebbe possibile esprimere i vari spostamenti virtuali, mediante un solo parametro  $\theta_1$ !

Si suppone, quindi, non di rimuovere il suddetto vincolo, ma abbassare di 1 il suo grado di molteplicità. La cerniera in  $A$  diviene, quindi, un carrello scorrevole. Si hanno diverse possibilità di configurazione; si sceglierà la seguente:



Si osserva subito, che la struttura di vertici  $ADF$  è da considerarsi come unico corpo rigido.

Le condizioni di vincolo sono:

$$dx_A \neq 0 \quad dx_C = 0 \quad dx_B \neq 0$$

$$dy_A = 0 \quad dy_C = 0 \quad dy_B = 0$$

dove i vari  $dx$  e  $dy$  indicano i corrispondenti spostamenti lungo gli assi di riferimento. Si hanno le seguenti equazioni:

- 1)  $dx_F = dx_A - \theta_3(y_F - y_A) \Rightarrow dx_F = dx_A$
- 2)  $dy_F = dy_A + \theta_3(x_F - x_A) \Rightarrow dy_F = 2l\theta_3$
- 3)  $dx_F = dx_B - \theta_2(y_F - y_B) \Rightarrow dx_F = dx_B$
- 4)  $dy_F = dy_B + \theta_2(x_F - x_B) \Rightarrow dy_F = -l\theta_2$
- 5)  $dx_D = dx_C - \theta_1(y_D - y_C) \Rightarrow dx_D = -2l\theta_1$
- 6)  $dy_D = dy_C + \theta_1(x_D - x_C) \Rightarrow dy_D = 0$
- 7)  $dx_D = dx_A - \theta_3(y_D - y_A) \Rightarrow dx_D = dx_A - l\theta_3$
- 8)  $dy_D = dy_A + \theta_3(x_D - x_A) \Rightarrow dy_D = l\theta_3$

dalla 6) e dalla 8), segue:  $\theta_3 = 0$ .

Dalla 2) e dalla 4), segue:  $\theta_2 = -2\theta_3 \Rightarrow \theta_2 = 0$ .

Quindi:

$$dx_A = dx_B = dx_D = dx_F = -2l\theta_1$$

$$dy_D = dy_F = 0$$

Quindi l'unico spostamento virtuale ammissibile è una traslazione lungo l'asse  $x$ .